Theoretische Physik I

Prof. Zawischa[1]

Wintersemester 1997/98

[1] Überarbeitete Vorlesungsmitschrift von Mathias Neumüller

Dieses Vorlesungsskript ist aus meiner pernsönlichen Vorlesungsmitschrift der Vorlesung „Theoretische Physik I – Klassische Mechanik und Elektrodynamik“ bei Professor Zawischa entstanden. Für Richtigkeit und Vollständigkeit kann ich trotz sorgfältiger Erstellung nicht garantieren.
Mein besonderer Dank gilt Stephan Leinhäuser und Eicke Ahlers für das Erstellen und Scannen der Grafiken (nicht in allen Versionen enthalten) und Michael Kienzle und Kai Eckert für das Korrigieren zahlreicher Fehler.
Dieses Werk darf unter folgenden Voraussetzungen frei benutzt werden:

1. Eventuelle Fehler sind unverzüglich an mich weiterzuleiten, am besten per eMail: *Mathias.Neumueller@stud.uni-hannover.de*

2. Die Weitergabe ist nur in *unveränderter* Form erlaubt.

3. Eine über den privaten Bereich hinausgehende Verwertung ist nur mit meiner ausdrücklichen Genehmigung zulässig.

Ich behalte mir ausdrücklich das Urheberrecht an diesem Werk vor.

Inhaltsverzeichnis

I Klassische Mechanik **7**

1 Newtonsche Mechanik **9**
1.1 Mechanik von Massenpunkten 9
1.1.1 Die Newtonschen Axiome 9
1.2 Systeme von Massenpunkten 11
1.3 Zwangsbedingungen 13
1.3.1 Zwangskräfte 13
1.4 Bewegte Bezugssysteme 14
1.4.1 Infinitesimale Drehungen 14
1.5 Bewegung des starren Körpers 15
1.5.1 Kräftefreie Bewegung des starren Körpers 17
1.5.2 Symmetrischer Kreisel 18

2 Lagrangesche Mechanik **21**
2.1 Das Hamilton-Prinzip der stationären Wirkung 21
2.1.1 Wirkung 21
2.1.2 Lagrange-Funktion 21
2.1.3 Das Hamilton-Prinzip 21
2.2 Die Technik der Variationsrechnung 22
2.2.1 Variation mit Nebenbedingungen 24
2.2.2 Verallgemeinerung auf mehrere Variablen 24
2.3 Das d'Alembertsche Prinzip 25
2.3.1 Virtuelle Verschiebung, virtuelle Arbeit 25
2.3.2 Das d'Alembertsche Prinzip 26
2.3.3 Zwangsbedingungen 27
2.3.4 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte 29
2.3.5 Anholonome Zwangsbedingungen 31
2.4 Symmetrien und Erhaltungssätze 33
2.4.1 Homogenität der Zeit 33
2.4.2 Homogenität des Raumes 34
2.4.3 Das Noethersche Theorem 34
2.5 Der Stoß 36
2.5.1 Reibungsfreier Zusammenstoß „starrer" Körper 37

3 Bewegungsgleichungen an Beispielen **39**
3.1 Das Zweikörperproblem 39
3.1.1 Streuung von Teilchen im Zentralkraftfeld 43
3.2 Der eindimensionale Oszillator 45

3.2.1 Harmonische Schwingungen . . . 45
3.2.2 Anharmonische Schwingungen . . . 46
3.2.3 Parametrische Resonanz . . . 49

4 Hamiltonsche Mechanik 53
4.1 Legendretransformation . . . 53
4.1.1 Verallgemeinerung auf mehrere Variablen . . . 54
4.2 Kanonische Transformation . . . 56
4.2.1 Die Poisson-Klammern . . . 57

II Elektrodynamik 59

5 Die Maxwellschen Gleichungen 61
5.1 Maxwell-Gleichungen . . . 61
5.1.1 Maßsysteme in der Elektrodynamik . . . 62
5.1.2 Energie des elektromagnetischen Feldes . . . 65
5.1.3 Impuls . . . 66
5.1.4 Drehimpuls . . . 66
5.2 Elektrostatik . . . 67
5.2.1 Randbedingungen . . . 68
5.2.2 Formale Lösung mit Hilfe Greenscher Funktion . . . 68
5.2.3 Methode der elektrischen Bilder . . . 69
5.2.4 Elektrisches Dipol . . . 70
5.3 Magnetostatik . . . 70
5.3.1 Multipolentwicklung . . . 70

6 Elektromagnetische Wellen 73
6.1 Die Greensche Funktion der Wellengleichung . . . 73
6.2 Retardierte Potentiale . . . 74
6.2.1 Liénard-Wiechert-Potentiale: Abstrahlung einer beliebig bewegten, punktförmigen Ladung . . . 74
6.2.2 Der oszillierende Dipol . . . 76
6.2.3 Beliebiger Multipol . . . 79
6.2.4 Quadrupolstrahlung . . . 81

7 Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen 83
7.1 Ladungen in Materie . . . 83
7.1.1 Elektrostatik . . . 84
7.2 Magnetismus in Materie . . . 87
7.2.1 Magnetostatik . . . 88
7.3 Ebene Wellen im Dielektrikum . . . 89
7.3.1 Brechung und Reflexion an Grenzflächen . . . 90

8 Spezielle Relativitätstheorie 93
8.1 Krummlinige Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ . . . 93
8.2 Lorentz-Transformation . . . 95
8.2.1 Längenkontraktion . . . 98
8.2.2 Zeitdiletation . . . 98
8.2.3 Minkowski-Diagramm . . . 99

8.2.4 Hintereinanderausführen von 2 Lorentztransformationen 99
8.2.5 Vierervektoren 100
8.2.6 Boost 102
8.2.7 Allgemeine Lorentztransformation 103
8.2.8 Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik 104
8.2.9 Vierertensoren 105
8.2.10 Maxwell-Gleichungen 107

Teil I

Klassische Mechanik

Kapitel 1

Newtonsche Mechanik

Einleitung und Wiederholung

Klassische Mechanik:	Statik	
	Dynamik:	Kinematik
		Kinetik
		Hydrodynamik
		Elastizität

- Grenzfall der Quantenmechanik
- Grenzfall der „relativistischen Physik“
- reeller, dreidimensionaler, euklidischer, affiner Raum

1.1 Mechanik von Massenpunkten

Bahnkurve, Trajektorie

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{OP} \\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\ &= x_i\vec{e}_i \qquad \text{(Summenkonvention)} \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_i$$

1.1.1 Die Newtonschen Axiome

Trägheitsgesetz

Man kann ein Bezugssystem finden ... *Inertialsystem*

„Lex secunda“

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}} \tag{1.1}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}} \qquad m\text{: (träge) Masse}$$

Actio = reaction

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \tag{1.2}$$

Korollar (4. Axiom)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

„Superpositionsprinzip“ „Kräfteparallelogramm“

Arbeit

$$W_{P_2P_1} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r} \tag{1.3}$$

$$W_{P_2P_1} = \int \vec{F}\, d\vec{r} = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \underbrace{\vec{v}\, dt}_{d\vec{r}} = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} v^2 dt = \frac{m}{2} \left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$T := \frac{m}{2} v^2 \qquad W_{P_2P_1} = T_2 - T_1$$

Kraftfeld

ortsabhängige Kraft $\vec{F}\,(\vec{r})$

Konservatives Kraftfeld

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{r} = 0, \text{ beliebiges } \mathcal{C} \iff \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

Potential

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad} V(\vec{r}) \\ V(\vec{r}) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} F(\vec{r}')\, d\vec{r} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} W_{P_1P_2} = T_2 - T_1 &= -\left(V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)\right) \\ T_2 + V_2 &= T_1 + V_1 \\ T + V &= \text{const} \qquad \text{(Energieerhaltung)} \end{aligned}$$

1.2 Systeme von Massenpunkten

$$\dot{\vec{p}}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{(e)}}_{\text{äußere}} + \underbrace{\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{F}_{ij}}_{\text{innere (Wechselwirkungs-) Kräfte}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i\vec{r}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{=:\vec{F}^{(e)}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \vec{F}_{ij}}_{=0 \text{ weil } \vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}}$$

Massenmittelpunkt, Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} \tag{1.5}$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}$$

Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt}M\vec{R} = M\vec{V} \tag{1.6}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}^{(e)} \tag{1.7}$$

Drehimpuls

$$\vec{L}_{O'} = \sum_i \vec{x}_i' \times \vec{p}_i' \tag{1.8}$$

$$\vec{x}_i' = \vec{x}_i - \vec{X}$$

$$\vec{p}_i' = m_i\left(\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}}\right) = m_i\dot{\vec{x}}_i'$$

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \underbrace{\sum_i \frac{d\vec{x}_i'}{dt}\times m_i\dot{\vec{x}}_i'}_{=0} + \sum_i \vec{x}_i' \times m_i\left(\ddot{\vec{x}}_i - \ddot{\vec{X}}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i \vec{x}_i' \times \left(\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{k \\ k\neq i}} \vec{F}_{ij}\right) - \left(\sum_i m_i\vec{x}_i'\right)\times\ddot{\vec{X}}$$

Für die einzelnen Terme in diesem Ausdruck gilt:

$$\sum_{i\neq k} \vec{x}_i' \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i<k}\left(\vec{x}_i' \times \vec{F}_{ik} + \vec{x}_k' \times \vec{F}_{ki}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i<k}\underbrace{(\vec{x}_i' - \vec{x}_k')\times\vec{F}_{ik}}_{=0}$$

(Solange die Kräfte in Richtung des Verbinungsvektors zeigen.)

Der letzte Term verschwindet, wenn

1. $\ddot{\vec{X}} = 0$: Bezugspunkt ist fest im Inertialsystem
2. $\sum_i m_i \vec{x}'_i = 0$ Bezugspunkt ist Schwerpunkt des Systems
3. $\sum_i m_i \vec{x}'_i \parallel \ddot{\vec{X}}$ (ohne praktische Bedeutung)

$$\frac{d\vec{L_{O'}}}{dt} = \sum_i \vec{x}'_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{N}^{(e)}_{O'i} = \vec{N}^{(e)}_{O'} \tag{1.9}$$

$\vec{N}^{(e)} = 0$ Drehimpulserhaltung
(auch komponentenweise $N_x = 0 \Longrightarrow L_x = \text{const}$)

Kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i v_1^2 \qquad \vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \underbrace{\vec{V}\sum_i m_i \vec{v}'_i}_{=0} \end{aligned}$$

($\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$, wenn der Bezugspunkt gleich dem Schwerpunkt ist.)

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2}_{\text{Kinetische Energie der Bewegung um den Schwerpunkt}} \tag{1.10}$$

Nur für konservative Kräfte gilt:

1. äußere Kräfte

$$W_{21} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)}\, d\vec{r}_i = -\sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i(\vec{r}_i)\, d\vec{r}_i = -\sum_i V_i \Big|_1^2$$

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \end{pmatrix}$$

2. innere Kräfte

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ij}\, d\vec{r}_i$$

$$\vec{F_{ij}} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\vec{F_{ji}}$$

$$V_{ij} = V_{ji} \qquad V_{ij} = (|\vec{r}_i - \vec{r_j}|)$$

Kräfte wirken in der Verbindungslinie der Teilchen.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ij}\, d\vec{r}_i &= -\sum_{i<j} \int_1^2 \left(\nabla_i V_{ij}\, d\vec{r}_i + \underbrace{\nabla_j}_{=-\nabla_i} V_{ij}\, d\vec{r}_j \right) \\ &= \sum_{i<j} \int_1^2 \nabla_i V_{ij}\, d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &= -\sum_{i<j} V_{ij} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i\neq j} V_{ij} \Big|_1^2\end{aligned}$$

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} V_{ij} \tag{1.11}$$

$$T + V = \text{const} \tag{1.12}$$

1.3 Zwangsbedingungen: Einschränkung der Bewegung

Beispiele

- Starrer Körper: Abstand $r_{ik} = \text{const}$
- „Perle auf Draht“
- Moleküle im Gefäß: (nicht holonom)
- Pendel

1.3.1 Zwangskräfte

Holonome Zwangsbedingung

Die Bedingung läßt sich durch $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots, t) = 0$ beschreiben.

Anholonome Zwangsbedingung

Nicht holomone Zwangsbedingung (z.B. Moleküle im Gefäß, rollende Kugel). Beschreibung zum Beipiel durch $a_1 < x < a_2$.

Skleronome Zwangsbedingung

Zeitunabhängige Zwangsbedingung

Rheonome Zwangsbedingung

Zeitabhängige Zwangsbedingung

1.4 Bewegte Bezugssysteme, Kinematik des starren Körpers

1.4.1 Infinitesimale Drehungen

$$\delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = D^T_{(\vec{n},\varphi)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Beispiele

($\delta\varphi$ statt sin, 1 statt cos wegen kleiner Winkel)

$$D_{(z,\delta\varphi_3)} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi_3 & 0 \\ -\delta\varphi_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^T_{(z,\delta\varphi_3)} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\varphi_3 & 0 \\ \delta\varphi_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehung $\delta\varphi_1$ um x-Achse, $\delta\varphi_2$ um y-Achse, $\delta\varphi_3$ um z-Achse:

$$D^T(\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\varphi_3 & \delta\varphi_2 \\ \delta\varphi_3 & 1 & -\delta\varphi_1 \\ -\delta\varphi_2 & \delta\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \left[D^T(\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3) - \mathbf{E}\right] \vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r} \text{ mit } \delta\vec{\varphi} = \delta\varphi_k \vec{e_k}$$

$$D^T_{ij}(\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3) = \delta_{ij} - \varepsilon_{ijk}\delta\varphi_k$$

$$\left[(D^T - \mathbf{E})\vec{r}\right]_i = -\varepsilon_{ijk}\delta\varphi_k x_j = \varepsilon_{ikj}\delta\varphi_k x_j = \left[\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}\right]_i$$

$$\delta\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r}\,\delta\varphi = \underbrace{\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}}_{\substack{\text{Richtung: Drehachse} \\ \pm\text{Betrag: Drehwinkel}}}$$

$\Longrightarrow$ Infinitesimale Drehungen lassen sich als Vektoren auffassen:
$\Longrightarrow$ axiale Vektoren (Gegensatz: polare Vektoren)
$\Longrightarrow$ Bei Spiegelung Richtungsumkehr

Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\vec{\varphi}}{\delta t} \qquad \text{(axialer Vektor)}$$

Bewegtes Bezugssytem

Bezugssystem dreht sich mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ gegenüber Inertialsystem.

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_i$$

beliebiger Vektor: $\vec{G} = G'_i \vec{e}'_i$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{G}}{dt} &= \frac{dG'_i}{dt}\vec{e}'_i + G'_i \frac{d\vec{e}'_i}{dt} \qquad \text{z.B. Newton nur in Inertialsystem, } F = m\ddot{r} \\
&= \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{rel}} + G'_i \vec{\Omega} \times \vec{e}'_i \\
\frac{d\vec{G}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times \vec{G} \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Relativbewegung

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \qquad \frac{d\vec{r}'}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \\
\vec{v} &= \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_{\text{rel}} \qquad \vec{v}_{\text{rel}} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\text{rel}}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}_{\text{in } \vec{F}^{(e)} = m\vec{a}} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \left(\frac{d\vec{v}_{\text{rel}}}{dt}\right)_{\text{rel}} \qquad (1.14)$$

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}' - \underbrace{2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right)}_{\text{Zentrifugalkraft}} \qquad (1.15)$$

Corioliskraft und Zentrifugalkraft sind Scheinkräfte.

1.5 Bewegung des starren Körpers

$$\vec{v_p} = \underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\vec{v}_{O'}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\text{rel}}}_{0} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\begin{aligned}
\overset{1.8}{\Longrightarrow} \qquad \vec{L}_{O'} &= \int \vec{r}' \times dm\,(\vec{v_p} - \vec{v}_{O'}) \\
&= \int dm\,\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
\vec{L}_{O'} &= \int dm\,[(\vec{r}'\vec{r}')\,\vec{\omega} - \vec{r}'\,(\vec{r}'\vec{\omega})] = I\vec{\omega} \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

$$I = \int dV\,\varrho(\vec{r}')\left[r'^2\mathbf{E} - \vec{r}' \circ \vec{r}'\right] \qquad (1.17)$$

$$I_{ik} = \int dV\,\varrho\left[r'^2\delta_{ik} - x'_i x'_k\right]$$

symmetrische 3×3-Matrix, Tensor

$$\int dV\,\varrho \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Bewegungsgleichung: Bezugspunkt *ortsfest* oder *Schwerpunkt*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} \qquad \vec{N}^{(e)} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{\,(e)}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \left(\frac{dI}{dt}\right)\vec{\omega}$$

Körperfestes System

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\
&= I\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{L}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{t}\right)_{\text{rel}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega}}_{0}$$

Absolute Winkelgeschwindigkeit, vom bewegten System aus betrachtet.

Eulersche Bewegungsgleichung für den starren Körper

$$\vec{N} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega} \tag{1.18}$$

Körperfestes Koordinatensystem sei Hauptachsensystem

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} N_1 &=& I_1\dot{\omega_1} - \omega_2\omega_3\,(I_2 - I_3) \\ N_2 &=& I_2\dot{\omega_2} - \omega_3\omega_1\,(I_3 - I_1) \\ N_3 &=& I_3\dot{\omega_3} - \omega_1\omega_2\,(I_1 - I_2) \end{array}\right\} \tag{1.18a}$$

Kinetische Energie

$$\overset{1.10}{\Longrightarrow} \qquad T = \frac{1}{2}M \underbrace{V^2}_{\text{Schwerpunktgeschwindigkeit}} + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$$

$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 &= \frac{1}{2}\sum_i \vec{v}_i' m_i \vec{v}_i' = \frac{1}{2}\sum_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \vec{p}_i' \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \vec{\omega}\vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} \\ T_{\text{trans}} &= \frac{1}{2}MV^2 \\ T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}I\vec{\omega} \end{aligned} \tag{1.19}$$

1.5.1 Kräftefreie Bewegung des starren Körpers

Geometrische Beschreibung von Poinsot

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}I\vec{\omega} = \text{const}$$

Energiegleichung eines Ellipsoids

$$\vec{\omega}I\vec{\omega} = 2T \qquad \nabla_\omega = \frac{1}{2}\vec{\omega}\bar{I}\vec{\omega} = I\vec{\omega} = \vec{L}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_{\omega_k}\omega_i I_{ij}\omega_j &= \frac{1}{2}\left[\delta_{ik}I_{ij}\omega_j + \omega_i I_{ij}\delta_{jk}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[I_{kj}\omega_j + \omega_i I_{ik}\right] = I_{kj}\omega_j \end{aligned}$$

d: Abstand von O von der Tangentialebene

$$d = \vec{\omega}\vec{n} = \frac{\vec{\omega}\vec{L}}{|\vec{L}|} = \text{const}$$

Drehung um Hauptachsen

$I_{\max}$: stabil $\quad$ $I_{\min}$: stabil $\quad$ I_{mittel}: instabil

1.5.2 Symmetrischer Kreisel

$$I_1 = I_2 \neq I_3$$

3-Achse in Richtung der Figurenachse, 1- und 2-Achse dazu senkrecht, z.B. 1-Achse in xy-Ebene. $\vec{\Omega}$: Winkelgechwindigkeit des bewegten Bezugssystems

$$\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{Winkelgeschwindigkeit des Kreisels}} = \vec{\Omega} + \vec{\sigma} \tag{1.20}$$

$$\vec{\sigma} = \sigma \vec{e_3}$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times \vec{L} \tag{1.21}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\sigma}$$

$$\vec{\Omega} \times I\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 - \sigma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_1\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2\omega_3(I_3 - I_1) + \sigma\omega_2 I_1 \\ \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) - \sigma\omega_1 I_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega_1} + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 + I_1\sigma\omega_2 &= N_1 \qquad \text{Eulersche Kreisel-Gleichungen} \\ I_1\dot{\omega_2} - (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 - I_1\sigma\omega_1 &= N_2 \\ I_3\dot{\omega_3} &= N_3 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Der Kreiselkompaß (nach Foucault)

Kreisel, dessen Figurenachse an die horizontale Ebene gefesselt ist. 1-Achse vertikal, 2- und 3-Achse horizontal.

$$\vec{\Omega} = \underbrace{\vec{\nu}}_{\text{Erddrehung}} + \dot{\varphi}\vec{e_1}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \sigma\vec{e_3}$$

$N_3 = 0$, da sich Reibung und Antriebskräfte kompensieren.
N_2 wird benötigt, um Kreiselachse horizontal zu halten.
$N_1 = -\Lambda\dot{\varphi}$, Dämpfung der Bewegung um die 1-Achse.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi} + \nu \sin\alpha \\ \omega_2 &= \nu \cos\alpha \sin\varphi \\ \omega_3 &= \nu \cos\alpha \cos\varphi + \sigma\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (1.22) ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi} + (I_3 - I_1)[\overbrace{\nu^2 \cos^2\alpha \sin\varphi \cos\varphi}^{\nu^2 \to 0} + \nu \cos\alpha \sin\varphi\sigma] & \\ +I_1\sigma\nu \cos\alpha \sin\varphi &= -\Lambda\dot{\varphi} \qquad \text{(a)} \\ I_1\nu \cos\alpha \cos\varphi\dot{\varphi} - (I_3 - I_1)(\dot{\varphi} + \nu \sin\alpha)(\nu \cos\alpha \cos\varphi + \sigma) & \\ -I_1\sigma(\dot{\varphi} + \nu \sin\alpha) &= N_2 \qquad \text{(b)} \\ I_3\dot{\omega}_3 &= 0 \qquad \text{(c)}\end{aligned}$$

$$\overset{\text{(c)}}{\Longrightarrow} \qquad \omega_3 = \text{const} = \sigma + \underbrace{\nu \cos\alpha \cos\varphi}_{\sigma \gg \nu \longrightarrow 0}$$

$$\overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow} \qquad I_1\ddot{\varphi} + \Lambda\dot{\varphi} + I_3\sigma\nu \cos\alpha \sin\varphi = 0$$

$$\frac{1}{I_1} =: \lambda \qquad \frac{I_3}{I_1}\sigma\nu \cos\alpha =: \omega_0^2$$

$$\ddot{\varphi} + \lambda\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0$$

Differentialgleichung des mathematischen Pendels mit Dämpfung.

$$\overset{\text{(b)}}{\Longrightarrow} \qquad N_2$$

Kreiselpendel

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 + I_1\sigma\omega_2 &= N_1 \\ I_1\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 - I_1\sigma\omega_1 &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 &= N_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\varphi} = \omega_1 \\ \Omega_2 &= 0 = \omega_2 \\ \Omega_3 &= 0 \qquad \omega_3 = \sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_1 &= -lMg \sin\varphi \\ N_2 &= F_a a \\ N_3 &= 0\end{aligned}$$

$$I_1\ddot{\varphi} = -lMg\underbrace{\sin\varphi}_{\approx\varphi} \qquad \text{Mathematisches Pendel}$$

$$\varphi = A\cos\nu t + B\sin\nu t \qquad \nu = \sqrt{\frac{lMg}{I_1}}$$

$$\omega_3 = \sigma = \text{ const}$$

$$-I_3\sigma\dot{\varphi} = N_2 = aF_a$$

Kapitel 2

Lagrangesche Mechanik

2.1 Das Hamilton-Prinzip der stationären Wirkung

Zur Wiederholung: Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \qquad \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

2.1.1 Wirkung

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{2.1}$$

2.1.2 Lagrange-Funktion

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, \dot{x_1}, \dot{x_2}, \ldots, t) \tag{2.2}$$

Lagrange-Funktion, als bekannt vorausgesetzt. Näheres hierzu im Buch von Landau-Lifschitz [3].

Für konservative Systeme

Eine mögliche Wahl:

$$L = T - V \tag{2.3}$$

2.1.3 Das Hamilton-Prinzip

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

Die Bewegung eines mechanischen Systems zwischen Punkt 1, der zum Zeitpunkt t_1 durchlaufen wird, und dem Punkt 2, der zum Zeitpunkt t_2 durchlaufen wird, ist derart, daß das Linienintegral $I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ entlang der durchlaufenden Bahn einen stationären Wert (Minimum, Maximum oder Sattelpunkt) einnimmt.

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \qquad \text{skalare Funktion } L(x,\dot{x},t)$$

Verallgemeinerte Koordinaten

$$q^i \qquad i=1,\cdots,f \qquad f\text{: Zahl der Freiheitsgrade}$$

Verallgemeinerte Geschwindigkeit

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$$

2.2 Die Technik der Variationsrechnung

Funktional: eine „Funktion von Funktionen“

$$I = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \tag{2.5}$$

$F(x,y,y')$ vorgegebene Funktion, z.B. $F=\sqrt{1+y'^2}$, Weglänge zwischen zwei Punkten. Die Endpunkte werden bei der Variation festgehalten. $\bar{y}(x)$ sei die Lösung.

$$\eta(x): \quad \eta(a)=\eta(b)=0 \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} y &= \bar{y}+\varepsilon\eta(x) && \text{(a)}\\ I(\varepsilon) &= \textstyle\int_a^b F(x,\underbrace{\bar{y}+\varepsilon\eta}_{y},\underbrace{\bar{y}'+\varepsilon\eta'}_{y'})dx && \text{(b)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Bedingung für stationären Wert:

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=0 \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\eta}_{\frac{\partial y}{\partial\varepsilon}}+\frac{\partial F}{\partial y'}\underbrace{\eta'}_{\frac{\partial y'}{\partial\varepsilon}}\right)dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\eta\,dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\eta\,dx}_{\text{partielle Integration}}\\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\eta\,dx + \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right]_a^b}_{0,\text{ wegen (2.6)}} - \int_a^b \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\,dx\\ &= \int_a^b \eta\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]dx = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad \text{Euler-Lagrange-Gleichung des Variationsproblems} \tag{2.9}$$

$$\delta I := \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \qquad \delta y := \eta \, d\varepsilon$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad y' \not\equiv 0$$

$$\frac{d}{dx}F(y,y') = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \underline{\frac{\partial F}{\partial y'}y''}$$

$$\frac{d}{dx}y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \underline{y''\frac{\partial F}{\partial y'}} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'} - f\right) = 0$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = \text{const} \tag{2.10}$$

wenn $F(y,y')$ nicht explizit von x abhängt.

Beispiel

$$F = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

$$y' = 0 \qquad y = ax + b$$

Beispiel: Bewegung im Schwerkraftfeld der Erde

Hamilton-Prinzip:

$$\int_{t_1}^{t_2} L \, dt \to \text{stationär}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{z} + mg = 0$$

Newton:

$$\dot{p_z} = -mg$$

Anderer Lösungsweg L unabhängig von t

$$\dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \text{ const}$$

$$\dot{z}m\dot{z} - \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz = \text{ const}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{z}^2}_{T} + \underbrace{mgz}_{V} = E \qquad \text{Energiesatz}$$

2.2.1 Variation mit Nebenbedingungen

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \to \text{extremal (stationär)}$$

$$\int_a^b G(x, y, y')\, dx = \text{ const} \qquad \text{Nebenbedingung in Integralform}$$

Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung

$$F(x, y) \to \text{maximal} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \nabla F = 0$$

$$G(x, y) = 0 \quad \text{Kurve}$$

$$\nabla F \parallel \nabla G \perp \text{ auf Kurve} \qquad G = 0$$

$$[F(x, y) + \lambda G(x, y)] \to \text{ maximal} \qquad G(x, y) = 0$$

λ: Lagrangescher Multiplikator

$$\left.\begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial x}(F + \lambda G) & = & 0 & \\ \frac{\partial}{\partial y}(F + \lambda G) & = & 0 & \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}(F + \lambda G) & = & 0 & \Longrightarrow \; G = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Bedeutung } \nabla F \parallel \nabla G$$

$$\bar{I} = \int_a^b (F + \lambda G)\, dx \to \text{stationär} \tag{2.11}$$

λ so, daß Nebenbedingungen erfüllt sind.

2.2.2 Verallgemeinerung auf mehrere Variablen

$$x \to t \qquad y \to q^1, q^2, \ldots \qquad y' \to \dot{q^1}, \dot{q^2}, \ldots$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q^i}, t) dt$$

Euler-Lagrange-Gleichung: (2.9')

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q^i}} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, f$$

2.3 Das d'Alembertsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen

2.3.1 Virtuelle Verschiebung, virtuelle Arbeit

$$\vec{F}_{(i)} = 0 \text{ für Massepunkt i}$$

Kleine („infinitesimale") Verschiebung, mit den Zwangsbedingungen verträglich.

$\delta\vec{r}_{(i)}$ „virtuelle Verschiebung"

$$\sum_i \vec{F}_{(i)} \cdot \delta\vec{r}_{(i)} = 0 \tag{2.12}$$

$$\vec{F}_{(i)} = \vec{F}_{(i)}^{(e)} + \underbrace{\vec{F}_{(i)}^{(r)}}_{\text{Reaktions- oder Zwangskräfte}}$$

$$\sum_i \vec{F}_{(i)}^{(e)} \delta\vec{r}_{(i)} = 0 \qquad \text{Prinzip der virtuellen Arbeit} \tag{2.13}$$

$$\delta\vec{r}_{(i)} = \underbrace{\frac{\partial\vec{r}_{(i)}}{\partial q^j}\delta q^j}_{\Sigma_j} \qquad j = 1, \ldots, f \tag{2.14}$$

$$\overset{2.13}{\Longrightarrow} \qquad \sum_{ij} \vec{F}_{(i)}^{(e)} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}\delta q^j = 0$$

$$Q_j(e) := \sum_i \vec{F}_{(i)}^{(e)} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j} = 0 \qquad \text{für alle } j \tag{2.15}$$

Beispiel: Hebelgesetz

$$-Fa\delta\phi + Gb\delta\phi = 0$$

$$F = \frac{Gb}{a}$$

Konservative Kräfte

$$\overset{2.15}{\Longrightarrow} \qquad \sum_i (-\nabla_i V) \frac{\partial\vec{r}_{(i)}}{\partial q^j} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_1}{\partial q^j} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q^j} + \ldots\right) = -\frac{\partial V}{\partial q^j} = 0 \tag{2.16}$$

Extremwertaufgabe

1. Zahl der Koordinaten durch Nebenbedingungen verringert ✓
2. Wenn Reaktionskräfte gesucht:

$$f^\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}) = 0$$

Nebenbedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren angekoppelt.

$$\text{Gleichgewicht} F_k = 0 \qquad F_k^{(e)} + F_k^{(r)} = 0$$

$$F_k^{(r)} = \lambda_1 \frac{\partial f^1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial f^2}{\partial x_k} + \ldots \qquad k = 1, \ldots, 3n$$

$$F_k^{(e)} + \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} \qquad 3n \text{ Bedingungen}$$

$$f^\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}) = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, \beta \qquad \beta\text{: Zahl der Bedingungen} \tag{2.18}$$

Gleichungen lösen für $x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_\beta$

Konservative Kräfte

$$F_k^{(e)} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}$$

Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} = 0 \qquad f^\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}) = 0 \tag{2.18'}$$

2.3.2 Das d'Alembertsche Prinzip

Jacob Bernoulli, d'Alembert

$$p_k = m_{(k)} \dot{x}_k \qquad \text{(Achtung: keine Summe!)}$$

$$F_k \underbrace{-\dot{p}_k}_{\text{„Trägheitskraft“}} = 0 \qquad \vec{F}_i - m_{(i)} \ddot{\vec{r}}_i = 0$$

$$F_k - m_{(k)} \ddot{x}_k = 0$$

Holonome Zwangsbedingung $f^\alpha(x_1, \ldots, x_k, \ldots; t) = 0; \quad \alpha = 1, \ldots, \beta$
Zwangskraft senkrecht auf Hyperfläche $f^\alpha = 0$, parallel „grad“f^α

$$F_k^{(r)} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial f^2}{\partial x_k} + \ldots = \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} \tag{2.19}$$

$$\left.\begin{array}{ll} F_k^{(e)} = -m_{(k)} \ddot{x}_k + \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_k} = 0 & 3n \text{ Gleichungen} \\ f^\alpha(x_1, \ldots, x_{3n}; t) = 0 & \beta \text{ Gleichungen} \end{array}\right\} \text{Lagrange-Gleichungen 1. Art} \tag{2.20}$$

Virtuelle Verschiebung

- t festgehalten
- Mit den Zwangsbedingungen verträglich
- Bei virtuellen Verschiebungen leisten Zwangskräfte keine Arbeit

$$\left(F_k^{(e)} - m_{(k)}\ddot{x}_k\right)\delta x_k + \underbrace{F_k^{(r)}\delta x_k}_{=0} = 0 \qquad \text{d'Alembertsches Prinzip} \tag{2.21}$$

Wegen Zwangsbedingung: δx_k nicht alle unabhängig voneinander!

2.3.3 Zwangsbedingungen

1. Lagrange-Multiplikatoren $\Longrightarrow$ Lagrange-Gleichungen 1. Art
2. holonome Zwangsbedingungen: Eliminieren überzähliger Variablen durch Ersetzen der x_k durch geeignet gewählte verallgemeinerte Koordinaten $q^j, j = 1, \ldots, f$

$$x^i = x^i(q^1, \ldots, q^f; t) \tag{2.22}$$

$$\dot{x}^i = v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial x^i}{\partial t} \tag{2.23}$$

$$\text{Virtuelle Verschiebungen} \Longrightarrow \delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\delta q^j$$

$$Q_j^{(e)} := F_k^{(e)}\frac{\partial x^k}{\partial q^j} \tag{2.24}$$

$$F_k^{(e)}\delta x^k = \underbrace{F_k^{(e)}\frac{\partial x^k}{\partial q^j}}_{Q_j^{(e)}}\delta q^j = Q_j^{(e)}\delta q^j \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} m_{(k)}\ddot{x}_k\frac{\partial x^k}{\partial q^j} &= \frac{d}{dt}\left(m_{(k)}\dot{x}_k\underline{\frac{\partial x^k}{\partial q^j}}\right) - m_{(k)}\dot{x}_k\frac{d}{dt}\left(\underline{\frac{\partial x^k}{\partial q^j}}\right) \\ &\overset{2.23}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\underbrace{\frac{m_{(k)}}{2}\dot{x}_k\dot{x}^k}_{=T} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\underbrace{\frac{m_{(k)}}{2}\dot{x}_k\dot{x}^k}_{=T} \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - Q_j^{(e)}\right)\delta q^j = 0 \tag{2.27}$$

Zwangsbedingungen holonom: δq^j unabhängig

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j^{(e)} \qquad \text{Lagrange-Gleichungen 2. Art} \tag{2.28}$$

Konservative Kräfte

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_{(i)} \frac{\partial \vec{r}_{(i)}}{\partial q^j} = -\frac{\partial V}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial q^j} = -\frac{\partial V}{\partial q^j} \tag{2.29}$$

$$F_{(i)} = -\nabla_i V \qquad F_k = -\frac{\partial}{\partial x^k} V$$

$$\overset{2.3}{\Longrightarrow} \qquad L = T - V \qquad \text{„natürliche Form der Lagrange-Funktion“}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} &= 0 \qquad \text{Lagrange-Gleichung 2. Art} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} &= Q_j^{(k)} \qquad \text{mit Reibungskräften} \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\delta \int_1^2 L\, dt = 0$$

Bei anderer Wahl von L

$$L' = L + \frac{dF}{dt} \qquad F(q^k, t)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = F(t_2) - F(t_1) \qquad \text{(wie oben)}$$

Die Lagrange-Funktion ist nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel: „Fliehkraftregler“

$$V = -mgh\cos\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Schneller Weg:

$$\vec{v} = l\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + l\sin\varphi\omega\vec{e}_\psi$$

$$T = \frac{m}{2}\left[l^2\dot{\varphi}^2 + \omega^2 l^2 \sin^2\varphi\right]$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + \omega^2 l^2\sin^2\varphi\right] + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi$$

$$ml^2\ddot{\varphi} - ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + mgl\sin\varphi = 0 \qquad \text{Bewegungsgleichung}$$

Langsamer Weg:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} l\sin\varphi\cos\omega t \\ l\sin\varphi\sin\omega t \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} l\cos\varphi\cos\omega t - l\sin\varphi\omega\sin\omega t \\ \dot{\varphi} l\cos\varphi\sin\omega t + l\sin\varphi\omega\cos\omega t \\ \dot{\varphi} l\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad v^2 = \dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}$$

$\Longrightarrow$ wie oben

2.3.4 Geschwindigkeitsabhängige Kräfte

$$Q_j = -\frac{\partial}{\partial q^j}U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^j} \tag{2.31}$$

$U(q,\dot{q})$: verallgemeinertes Potential

$$\overset{2.30}{\Longrightarrow} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$$

$$L = T - U \tag{2.32}$$

Lorentzkraft

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) && \text{(im SI-System)} \\ \vec{F} &= q\left(\vec{E} + \tfrac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) && \text{(im Gauß-System)} \end{aligned} \tag{2.33}$$

$\vec{E}, \vec{B}$ genügen Maxwell-Gleichungen.

$$\nabla\vec{B} = 0 \qquad \nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \tag{2.34}$$

$$\nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\left[-\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right] \\ F_k &= q\left[-\partial_k\Phi - \partial_t A_k + \varepsilon_{klm}v^l\varepsilon^{mnr}\partial_n A_r\right] \\ &= q\left[-\partial_k\Phi - \partial_t A_k + \left(\delta^n_k\delta^r_l - \delta^r_k\delta^n_l\right)v^l\partial_n A_r\right] \\ &= q\left[-\partial_k\Phi - \partial_t A_k + \underbrace{v^l\partial_k A_l}_{\partial_k(v^l A_l)} - v^l\partial_l A_k\right] \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\partial_k v^l = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{dx^l}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x^l}{\partial x^k} = \frac{d}{dt}\delta^l_k = 0$$

$$A_k = A_k(x^l(t),t) \qquad \frac{dA_k}{dt} = \frac{\partial A_k}{\partial x^l}\underbrace{\dot{x}^l}_{v^l} + \frac{\partial A_k}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} F_k &= -\frac{\partial}{\partial x^k}\left[q\Phi - qv^l A_l\right] - \frac{d}{dt}\underbrace{qA_k}_{qA_k = -\frac{\partial}{\partial v^k}[q\Phi - qv^l A_l]} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^k}\left[q\Phi - qv^l A_l\right] + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v^k}\left[q\Phi - qv^l A_l\right] \end{aligned}$$

$$U = q\Phi - q\dot{\vec{v}}\vec{A} \tag{2.36}$$

$$F_k = -\frac{\partial}{\partial x^k}U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^k} \tag{2.37}$$

$$L = t - q\Phi + q\vec{v}\vec{A} \tag{2.38}$$

Beispiel: Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = B\vec{e}_x \qquad \vec{A} = ay\vec{e}_z$$

$$\vec{A} = By\vec{e}_z \qquad \operatorname{rot}\vec{A} = \ldots = \vec{e}_x a \qquad (\vec{A}\text{: } \textit{ein} \text{ mögliches Vektorpotential})$$

$$\Phi = 0$$

$$L = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + qBy v_z$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv_x) &= 0 \qquad v_x = v_x(0) = \text{ const} \\ \frac{d}{dt}(mv_y) - qBv_z &= 0 \\ \frac{d}{dt}\underbrace{(mv_z + qBy)}_{\text{verallgemeinerter Impuls}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\dot{v}_y - qBv_z &= 0 \\ m\dot{v}_z + qBv_y &= 0 \\ m^2\ddot{v}_z + (qB)^2 v_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_z &= A\cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_0\right) \\ v_y &= A\sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x(0)t \\ y &= y_0 - A\frac{m}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_0\right) \\ z &= z_0 + A\frac{m}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

Schraubenlinie, Achse $\| \vec{B}$, Umlaufzeit nicht abhängig von $\vec{v}$.

2.3.5 Anholonome Zwangsbedingungen

$$\overset{2.27}{\Longrightarrow} \qquad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - Q_j^{(e)}\right)\delta q^j = 0$$

Zwangsbedingungen:

$$\sum_k a_{lk}\, dq^k + a_{lt}\, dt = 0 \tag{2.39}$$

$l = 1, 2, \ldots, b$ $\qquad$ b: Anzahl der Zwangsbedingungen

Bedingung für virtuelle Verschiebung δq^k:

$$\sum_k a_{lk}\, \delta q^k = 0 \tag{2.40}$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\delta q^k = 0 \qquad \delta q^k \text{ nicht unabhängig} \tag{2.41}$$

$$\sum_k \Bigg(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \underbrace{\sum_l \lambda^l(t) a_{lk}}_{\text{Zwangskraft}}\Bigg)\delta q^k = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial q^k} - \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \textstyle\sum_l \lambda^l(t) a_{lk} &= 0 \\ \textstyle\sum_k a_{lk}\dot{q}^k + a_{lt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &k = 1 \ldots f \\ &\text{Lagrange-Gleichung 1. Art} \end{aligned} \tag{2.42}$$

$f + b$ Gleichungen für $f + b$ Variablen.

Beispiel: Hohlzylinder auf schiefer Ebene

$$V = -mgs\sin\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2$$

Rollbedingung:

$$\dot{s} = a\dot{\varphi} \Longrightarrow \dot{s} - a\dot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \delta s - a\delta\varphi = 0$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + a^2\dot{\varphi}^2\right) + mg\sin\alpha s$$

$$\underbrace{\left(m\ddot{s} - mg\sin\alpha - \lambda\right)}_{0}\delta s + \underbrace{\left(ma^2\ddot{\varphi} + \lambda a\right)}_{0}\delta\varphi = 0$$

$$m\ddot{s} = \lambda + mg\sin\alpha$$

$$ma^2\ddot{\varphi} = -\lambda a$$

Nebenbedingung:

$$\dot{s} = a\dot{\varphi} \Longrightarrow \ddot{s} = a\ddot{\varphi}$$

$$\Longrightarrow ma\ddot{s} = -\lambda a \Longrightarrow \lambda = -m\ddot{s}$$

$$\Longrightarrow 2m\ddot{s} = mg\sin\alpha$$

Beispiel: Der „erstarrte“ Schlittschuhläufer

Zwangsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{rcll} \dot{x} & = & v(t)\cos\varphi & \\ \dot{y} & = & v(t)\sin\varphi & \end{array}\right\} \quad \text{(a)}$$

$$\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0 \quad \text{(b)}$$

$$\delta x\sin\varphi - \delta y\cos\varphi = 0$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

$$V = 0$$

$$\begin{array}{rcll} m\ddot{x} & = & \lambda\sin\varphi & \text{(c)} \\ m\ddot{y} & = & -\lambda\cos\varphi & \text{(d)} \\ \ddot{\varphi} & = & 0 & \text{(e)} \end{array}$$

$$\ddot{x}\sin\varphi + \dot{x}\cos\varphi\dot{\varphi} - \ddot{y}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi\dot{\varphi} = 0$$

$$\text{(e)} \Longrightarrow \dot{\varphi} = \text{ const } = \omega_0$$

Setze (c) und (d) ein:

$$\frac{\lambda}{m}\underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{1} = -\dot{\varphi}\left[\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi\right]$$

$$\frac{\lambda}{m} = -\omega_0 v(t) = -\omega_0\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = -\omega_0\frac{\dot{y}}{\sin\varphi}$$

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcll} \ddot{x} & = & -\omega_0\dot{y} & \dot{x} + \omega_o y & = & 0 & \dot{y} & = & C\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) & \\ \ddot{y} & = & \omega_0\dot{x} & \ddot{y} + \omega_0^2 y & = & 0 & \dot{x} & = & C\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) & C = v_0 \end{array}$$

2.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$: generalisierter zu q^i kanonisch konjugierter Impuls.
Wenn $\frac{\partial L}{\partial q^a} = 0$: q^n zyklische oder verborgene Koordinaten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = p_a = \text{ const} \tag{2.43}$$

Abgeschlossenes System

Keine Kräfte von außen: „autonomes System“

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$$

2.4.1 Homogenität der Zeit

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d}{dt}L = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\right]}_{\text{const}} = 0$$

Konservatives System

$$V = V(q^i) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$$

T: homogene quadratische Funktion $\dot{q}^i$

Eulerscher Satz für homogene Funktionen n-ter Ordnung

$$\sum_i q^i \frac{\partial}{\partial q^i} f(q^i) = n f(q^i)$$

$$\sum_i \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = 2T$$

$$[2T - (T - V)] = T + V = E = \text{ const} \tag{2.44}$$

2.4.2 Homogenität des Raumes

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{a} \qquad \text{ändert } L \text{ nicht}$$

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \underbrace{\delta \vec{r}_i}_{\vec{a},\ \text{beliebig}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv \nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\text{Lagrange-Gleichung:} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

x_i: x-Koordinate des i-ten Teilchens

$$dt \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}}_{0}$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i p_{x,i} = \frac{d}{dt} P_x = 0 \tag{2.45}$$

$$P_x = \text{const}$$

2.4.3 Das Noethersche Theorem

Emmy Noether: Die Lagrange-Funktion $L(q^i, \dot{q}^i)$ eines autonomen Systems sei unter der Transformation $q^i \to h^i(s, q^l)$ invariant, wobei s ein kontinuierlicher Parameter und $h^i(s = 0, q^l) = q^i$ die Identität ist. Dann gibt es ein Integral der Bewegung

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{ds} h^j(s, q^l)\Big|_{s=0} \tag{2.46}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} x_i &\to x_i + s \\ y_i &\to y_i \\ z_i &\to z_i \end{aligned}$$

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = P_x$$

Beweis zum Noetherschen Theorem

$$q^i \to \bar{q}^i = h^i(s, q^l)$$

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial}{\partial s} h^j(s, q^l)\bigg|_{s=0}$$

$$\begin{array}{lcll} q^i & = & q^i(t) & \text{Bahnkurve} \\ \bar{q}^i & = & h^i(s, q^j(t)) = q^i(t) & \text{ebenfalls Bahnkurve} \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\left(\bar{q}^i(t), \dot{\bar{q}}^i(t)\right) = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j}\left(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i\right) \qquad j = 1, \ldots, f$$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{d}{ds} L\left(h^i(s; q^l), \frac{d}{dt} h^i(s, q^l)\right)\bigg|_{s=0} \\ &= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}} \frac{\partial h^j(s, q^l)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j} \frac{d}{dt} \frac{\partial h^j(s, q^l)}{\partial s} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j} \frac{\partial h^j(s, q^l)}{\partial s}\right)\bigg|_{s=0} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial h^j(s, q^l)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiel: Invarianz bei Drehung um die z-Achse

$$x_i^{(P)\prime} = x_k^{(P)} d_{ki} \qquad \left(\vec{r}' = D^T \vec{r}\right)$$

Infinitesimale Drehung allgemein:

$$d_{kl} = \delta_{kl} + \varepsilon_{klm} \delta\varphi_m$$

$$d_{kl}(\vec{e}_z, \delta\varphi) = \delta_{kl} + \varepsilon_{kl3} \delta\varphi$$

$$(d_{kl}(\vec{e}_z, \delta\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi & 0 \\ -\delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} x_i^{(P)\prime}\bigg|_{s=0} = \varepsilon_{ki3} x_k^{(P)} \qquad x_i^{(P)\prime} = x_i^{(P)} + s\varepsilon_{ki3} x_k^{(P)}$$

$$\sum_{p=1}^{n} p_i^{(P)} \varepsilon_{ki3} x_k^{(P)} = \sum_{p} \varepsilon_{3ki} x_k^{(P)} p_i^{(P)} = L_3$$

2.5 Der Stoß

- Problem der Kontinuumsmechanik
- Sehr große Kraft über sehr kurze Zeit

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \vec{F}_i \qquad \Delta\vec{p} = \sum_i \int_{t_s-\Delta t}^{t_s+\Delta t} \vec{F}_i \, dt' \tag{2.47}$$

$$\vec{S}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_s-\Delta t}^{t_s+\Delta t} \vec{F}_i \, dt' \qquad \vec{F}_i = \vec{S}_i \, \delta(t - t_s) \tag{2.48}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = M(\vec{v}_s' - \vec{v}_s) = \sum_i \vec{S}_i \tag{2.49}$$

$\Delta t \to 0$: Lage des Systems ungeändert

Drehimpuls

Bezugspunkt geeignet wählen!

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}' - \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{S}_i \tag{2.50}$$

Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i} + Q_i$$

$$\int_{t_s-\Delta t}^{t_s+\Delta t} dt' \qquad \Delta t \to 0$$

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)' - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) = Z_i := \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_s-\Delta t}^{t_s+\Delta t} dt' \, Q_i \tag{2.51}$$

Beispiel: Dreifachpendel

Suche Anfangsbedingungen $\dot{\varphi}_i(t = 0 + \varepsilon)$.
$\varphi_i, \dot{\varphi}_i$ vor dem Stoß alle 0. I ist Trägheitsmoment der Stäbe im Schwerpunkt.

$$T = \frac{m}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2\right)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= l\dot{\varphi}_1 \\ v_2 &= 2l\dot{\varphi}_1 + l\dot{\varphi}_2 \\ v_3 &= 2l\dot{\varphi}_1 + 2l\dot{\varphi}_2 + l\dot{\varphi}_3 \qquad \text{für kleine Winkel } \varphi_i \end{aligned}$$

$$\vec{r} = 2l\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 \\ \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi_1}\right|_{\varphi_1=0} = 2l\left.\begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix}\right|_{\varphi_1=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2l \end{pmatrix} \qquad \text{entsprechend für } \varphi_2, \varphi_3$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \vec{S}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi_1} = 2lS \qquad \vec{S} = S\vec{e}_y \\ Z_2 &= 2ls \\ Z_3 &= 2ls \end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i}\right|_{\text{nach Stoß}} = Z_i \qquad i = 1,2,3$$

3 Gleichungen für $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$. Mit einigen Berechnungen erhält man als Ergebnis schließlich:

$$\dot{\varphi}_1(0+\varepsilon) = \frac{6S}{52ml} \qquad \dot{\varphi}_2(0+\varepsilon) = \frac{30S}{52ml} \qquad \dot{\varphi}_3(0+\varepsilon) = \frac{114S}{52ml}$$

$$\overset{2.51}{\Longrightarrow} \qquad \Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) = Z_i$$

$$Z_i := \lim \int dt'\, Q_i \qquad Q_j = \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}$$

$$Z_j = \vec{S}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \tag{2.52}$$

2.5.1 Reibungsfreier Zusammenstoß „starrer“ Körper

Die $v_{s,i}$ besitzen zumindest eine Tangentialebene.

$$\begin{aligned} m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1) &= -S\vec{n} && \text{(a)} \\ m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2) &= S\vec{n} && \text{(b)} \\ \underline{\underline{I_1}}(\vec{\omega}_1' - \vec{\omega}_1) &= \vec{r}_{1P} \times (-S\vec{n}) && \text{(c)} \\ \underline{\underline{I_2}}(\vec{\omega}_2' - \vec{\omega}_2) &= \vec{r}_{2P} \times (-S\vec{n}) && \text{(d)} \end{aligned}$$

$$(\vec{v}_1')_t = (\vec{v}_1)_t \qquad (\vec{v}_2')_t = (\vec{v}_2)_t$$

(a) - (d): 12 Gleichungen – $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{\omega}_1', \vec{\omega}_2', S$ 13 Unbekannte
Das Ergebnis ist abhängig von den Materialeigenschaften!

1. vollkommem elastischer Stoß: mechanische Energie bleibt erhalten
   Normalkomponente:
   $$\vec{v}_{1P\perp}' - \vec{v}_{2P\perp}' = -(\vec{v}_{1P\perp} - \vec{v}_{2P\perp})$$
2. vollkommen unelastischer Stoß: Deformation geht nicht zurück
   Normalkomponente:
   $$\vec{v}_{1P\perp}' - \vec{v}_{2P\perp}' = 0$$

Newtonsche Hypothese (Näherung!)

$$\vec{v}_{1P\perp}' - \vec{v}_{2P\perp}' = -\varepsilon(\vec{v}_{1P\perp} - \vec{v}_{2P\perp})$$

ε: Stoßzahl, abhängig vom Material, aber unabhängig von der Geschwindigkeit.

Kapitel 3

Lösungen der Bewegungsgleichungen in wichtigen Beispielen

3.1 Das Zweikörperproblem im Zentralkraftfeld

$$f_{12}(r)\vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{R}} = \text{const}$$

Neues Bezugssystem mit Ursprung im Schwerpunkt

$$\vec{r}_1' m_1 + \vec{r}_2' m_2 = 0$$

$$-\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{r}_1' & = & -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2' & = & \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

Bewegungsgleichung für m_2

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2' = f_{21}(r)\vec{e}_r$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}} = f_{21}(r)\vec{e}_r \tag{3.2}$$

Bewegungsgleichung für m_1

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1' = f_{12}(r)\vec{e}_r = -f_{21}(r)\vec{e}_r$$

$$-\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}} = -f_{21}(r)\vec{e}_r \qquad \text{(enthält nichts neues)}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \qquad \text{reduzierte Masse} \tag{3.3}$$

Drehimpuls bezüglich Massenmittelpunkt

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r}_1' \times \left(m_1 \dot{\vec{r}}_1'\right) + \vec{r}_2' \times \left(m_2 \dot{\vec{r}}_2'\right) \\ &= \ldots = \vec{r} \times \left(\mu \dot{\vec{r}}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\mu \to m$$

Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} \perp \text{ Bahnebene } \vec{r}, \vec{p}$$

In ebenen Polarkoordinaten:

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \qquad \varphi \text{ zyklisch}$$

$$f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} r: \quad & m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \tfrac{\partial V}{\partial r} &&= 0 \\ \varphi: \quad & \tfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) &&= 0 \end{aligned}$$

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{l}{m} \tag{3.5}$$

Radiale Gleichung:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} &= f(r) \\ m\ddot{r} &= \underbrace{f(r) + \frac{l^2}{mr^3}}_{F(r)\ \text{„effektive Kraft“}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r}\frac{l^2}{2mr^2} = -\frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\left(V + \frac{l^2}{2mr^2}\right)}_{\text{effektives Potential}}$$

Energieerhaltung

$$\frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right] + V = E$$

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V = E \tag{3.7}$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)} \tag{3.8}$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \tag{3.9}$$

$$t(r) \to r(t)$$

$$\overset{3.5}{\Longrightarrow} \dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$$

$$d\varphi = \frac{l\,dt}{mr^2(t)}$$

$$\varphi = \frac{l}{m}\int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')} + \varphi_0 \tag{3.10}$$

l, E, r_0, φ_0: 4 Integrationskonstanten

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

$$\left.\begin{array}{rrcll} & v(r) & = & \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r)\right)} & \text{Betrag} \\ \overset{3.8}{\Longrightarrow} & v_r(r) & = & \dot{r} = \ldots & \\ \overset{3.5}{\Longrightarrow} & \dot{\varphi} & & & \end{array}\right\} \text{nummerische oder graphische Bestimmung der Bahnkurve}$$

Gleichung der Bahnkurve: $t = t(\varphi)$

$$\overset{3.5}{\Longrightarrow} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{dG}{d\varphi}$$

$$\overset{3.6}{\Longrightarrow} \ddot{r} - \frac{l}{m^2r^3} = \frac{f(r)}{m}$$

$$u = \frac{1}{r} \qquad r = \frac{1}{u}$$

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{l}{m}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\ddot{r} = -\frac{l}{m}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\frac{l}{m}u^2 = -\frac{l^2}{m^2}u^2\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{f(\frac{1}{u})}{u^2} \tag{3.11}$$

Diese Differentialgleichung ist immer lösbar.

Spezialisieren

$$f(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = -\gamma m_1 m_2 u^2 \tag{3.12}$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma m_1 m_2 m}{l^2} \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3.12'}$$

$$u = A \cos(\varphi - \alpha) + \frac{\gamma m_1 m_2 m}{l^2} \tag{3.13}$$

Kegelschnitt in Polarkoordinaten:

$$\frac{P}{r} = 1 + \varepsilon \cos\varphi \tag{3.14}$$

$$\varepsilon = \frac{l}{a}$$

Kreis	$\varepsilon = 0$
Ellipse	$0 < \varepsilon < 1$
Parabel	$\varepsilon = 1$
Hyperbel	$\varepsilon > 1$

$$\overset{3.13}{\Longrightarrow} A = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{u_1}_{\text{Periphel}} - \underbrace{u_2}_{\text{Aphel}} \Big)$$

Energie: für $r_{1,2}$ ist $\dot{r} = 0$

$$\frac{m}{2} r_{1,2}^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{1,2}} = E$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{m^2 r^4}$$

$$\frac{l^2}{2m r_{1,2}^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_{1,2}} - E = 0$$

$$u^2 - u \frac{2\gamma m_1 m_2 m}{l^2} - \frac{2mE}{l^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}(u_1 - u_2) = \sqrt{\left(\frac{\gamma m_1 m_2 m}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}$$

$$A = \frac{r m_1 m_2}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\gamma^2 m m_1^2 m_2^2}} \tag{3.15}$$

Für Newtonsche Kraft: Lenz-Runge-Vektor

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{L} - m\kappa \frac{\vec{r}}{r} \tag{3.16}$$

$$f(r) = -\frac{\kappa}{r^2} \qquad \kappa = \gamma m_1 m_2$$

$$\underbrace{\vec{r}\vec{M}}_{rM\cos\varphi} = L^2 - m\kappa r$$

3.1.1 Streuung von Teilchen im Zentralkraftfeld

Intensität

$$I = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Zeiteinheit} \cdot \text{Flächeneinheit}_\perp}$$

Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen / Zeiteinheit}}{\text{Intensität der einfallenden Teilchen}} \tag{3.17}$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der in } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen / Zeiteinheit}}{\text{Einfallende Intensität } d\Omega}$$

$$[\sigma_{\text{tot}}] = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right] = L^2$$

Zentralkraft: Symmetrie um Achse des einfallenden Strahls

$$d\Omega = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$$

s Stoßparameter: Abstand von einer senkrechten Geraden durch das Streuzentrum

$$l = mv_\infty s = s\sqrt{2ME}$$

ϑ durch E und s festgelegt
Voraussetzung: ϑ monotone Funktion von s
Teilchen zwischen s und $s + ds$ wird in den Bereich zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ gestreut.

$$2\pi I s\, ds = I \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) 2\pi |\sin\vartheta d\vartheta|$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \left| \tfrac{s}{\sin\vartheta} \tfrac{ds}{d\vartheta} \right| \tag{3.19}$$

Beispiel: Streuung im Coulombfeld (Rutherford)

$$f = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\overset{3.13}{\Longrightarrow} \text{Bahnkurve} \qquad -\gamma m_1 m_2 \to \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r} = A\cos(\varphi - \alpha) - \frac{z_1 z_2 e^2 m}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

$$\overset{3.15}{\Longrightarrow} A = \frac{z_1 z_2 l^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\left[\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right]^2 m}}$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m}{l^2}\left[1 - \underbrace{\sqrt{1 + \frac{2El^2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}{\left[z_1 z_2 e^2\right]^2 m}}}_{=:\varepsilon>1}\cos\varphi\right]$$

$$\vartheta = \pi - 2\varphi_\infty$$

$$\varphi_\infty = \frac{\pi - \vartheta}{2} \qquad \cos\varphi_\infty = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

Durch Nullsetzen von $\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}{\left[z_1 z_2 e^2\right]^2 m}}\cos\varphi\right]$ ergibt sich

$$\cos\varphi_\infty = \left(\sqrt{1 + \frac{El^2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}{\left[z_1 z_2 l^2\right]^2 m}}\right)^{-1} = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

$$l = mv_\infty s = s\sqrt{2mE}$$

$$\frac{4mE^2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 s^2}{\left[z_1 z_2 e^2\right]^2 m} = \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} - 1$$

$$\Longrightarrow s = \cot\frac{\vartheta}{2}\frac{z_1 z_2 l^2}{4\pi\varepsilon_0 2E}$$

$$\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 2E}\left(-\frac{1}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 2E}\right)^2 \cot\frac{\vartheta}{2}\frac{1}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\frac{1}{\sin\vartheta}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \frac{1}{4}\left(\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \qquad \text{Rutherford-Streuquerschnitt} \qquad (3.20)$$

Schwerpunktsystem: $m \equiv \mu$ (reduzierte Masse)

Laborsystem	$\vec{r}_1, \vec{v}_1$
C.M.-System (Center of Mass)	$\vec{r}_1', \vec{v}_1'$
Schwerpunktsystem	$\vec{R}, \dot{\vec{R}}$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \vec{r}_1' \\ \vec{v}_1 &= \dot{\vec{R}} + \vec{v}_1' \end{aligned}$$

$$\tan\vartheta_L = \frac{v_1'(\infty)\sin\theta_S}{\dot{R} + v_1'(\infty)\cos\theta_S}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Longrightarrow \vec{r}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} = \frac{\mu}{m_1}\vec{r}$$

$$v_1'(\infty) = \frac{\mu}{m_1 v_0} \qquad (v_1'(\infty) = v_1'(-\infty))$$

$$\dot{R} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{m_2}v_0$$

$$\tan\vartheta_{\mathrm{L}} = \frac{\frac{\mu}{m_1}v_0\sin\theta_{\mathrm{S}}}{\frac{\mu}{m_2}v_0 + \frac{\mu}{m_1}v_0\cos\theta_{\mathrm{S}}} = \frac{\sin\theta_{\mathrm{S}}}{\cos\theta_{\mathrm{S}} + \frac{m_1}{m_2}} \tag{3.21}$$

$$\underbrace{2\pi\sin\vartheta_{\mathrm{L}}d\vartheta_{\mathrm{L}}}_{d\Omega_{\mathrm{L}}}\underbrace{I}_{\varrho v_{\mathrm{rel}}}\frac{d\sigma(\vartheta_{\mathrm{L}})}{d\Omega} = 2\pi\sin\theta_{\mathrm{S}}d\theta_{\mathrm{S}}I\frac{d\sigma'}{d\Omega'}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta_{\mathrm{L}}) = \frac{d\sigma'}{d\Omega'}(\theta_{\mathrm{S}})\frac{\sin\theta_{\mathrm{S}}}{\sin\vartheta_{\mathrm{L}}}\frac{d\theta_{\mathrm{S}}}{d\vartheta_{\mathrm{L}}} = \frac{d\sigma'}{d\Omega'}(\theta_{\mathrm{S}})\frac{d\left(\cos\theta_{\mathrm{S}}\right)}{d\left(\cos\vartheta_{\mathrm{L}}\right)} \tag{3.22}$$

Anmerkung: Falls die Funktion $\vartheta(s)$ nicht monoton ist, muß man die Kurve in monotone Teilfunktionen zerteilen.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = \sum_i \left|\frac{s}{\sin\vartheta}\frac{ds}{d\vartheta}\right| \tag{3.23}$$

3.2 Der eindimensionale Oszillator

$$m\ddot{x} = K(x) - R\dot{x} + F(t) \tag{3.24}$$

3.2.1 Harmonische Schwingungen

Betrachte nur kleine Schwingungen oder Voraussetzung, daß $K(x)$ linear ist.

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = F(t)$$

1. $R = 0$ ungedämpft
2. $R > 0$ gedämpft

Freie Schwingung

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0 \tag{3.25}$$

$\Longrightarrow$ Fallunterscheidung!

Erzwungene Schwingung (harmonischer Erreger)

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \tag{3.26}$$

$$x_{\mathrm{hom}} \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{Ansatz:} & x_p & = & A\cos\left(\omega t - \varphi\right) & \text{(a)} \\ \text{oder} & x_p & = & A_1\cos\left(\omega t\right) + A_2\sin\left(\omega t\right) & \text{(b)} \end{array} \tag{3.27}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$\left.\begin{array}{rcl} \cot\varphi & = & \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Gamma\omega} \\ A & = & \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}} \end{array}\right\} \tag{3.28}$$

beziehungsweise

$$\left.\begin{array}{rcll} A_1 & = & A_{\mathrm{el}} & = \frac{f_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\Gamma^2} \\ A_2 & = & A_{\mathrm{abs}} & = \frac{f_0\omega\Gamma}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\Gamma^2} \end{array}\right\} \tag{3.29}$$

$\Gamma = 0, \omega = \omega_0 \Longrightarrow$ Resonanz (im mathematischen Sinn)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega_0 t$$

$$x_p = A \underbrace{t}_{\uparrow} \cos\omega_0 t + B \underbrace{t}_{\uparrow} \sin\omega_0 t$$

Amplitude wächst hier mit der Zeit an (Resonanz).

3.2.2 Anharmonische Schwingungen

Taylorentwicklung der Kraft $K(x)$ weitergetrieben.

$$K(x) = -kx - lx^2 - nx^3 + \ldots \tag{3.30}$$

Freie Schwingung

$$R = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 \tag{3.31}$$

$$\alpha = \frac{l}{m} \qquad \beta = \frac{n}{m}$$

1. Oberschwingungen treten auf
2. Veränderung der Grundfrequenz

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0; \dot{x}(0) = 0$
„Klassische Störungsrechnung“

$$|\alpha x_{\max}^2| \ll \omega_0^2 |x_{\max}| \qquad |\beta x_{\max}^3| \ll \omega_0^2 |x_{\max}|$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\lambda\left(\alpha x^2 + \beta x^3\right) \qquad \lambda \text{ beliebig, im Endergebnis } \lambda = 1$$

$$\text{Ansatz:} \quad \left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x^{(0)} + \lambda x^{(1)} + \lambda^2 x^{(2)} + \ldots \\ x^{(0)} & = & a\cos\omega t \\ \omega & = & \omega_0 + \lambda\omega^{(1)} + \lambda^2\omega^{(2)} + \ldots \end{array}\right\} \tag{3.32}$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\lambda\left(\alpha x^2 + \beta x^3\right) - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}$$

$$x = x^{(0)} + \lambda x^{(1)} \qquad \omega = \omega_0 + \lambda\omega^{(1)}$$

Koeffizientenvergleich

$x^{(0)}$:

$$x^{(0)} = a\cos\omega t$$

$x^{(1)}, \omega^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\lambda\ddot{x}^{(0)} + \lambda\omega_0^2 x^{(1)} &= -\lambda\alpha a^2\cos^2\omega t - \lambda\beta a^3\cos^3\omega t \\ &\quad + \underbrace{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\omega^2}_{\approx 2\lambda\omega_0\omega^{(1)}} a\cos\omega t\end{aligned}$$

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = \underbrace{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}_{1+2\lambda\frac{\omega^{(1)}}{\omega_0}+\ldots\approx 1} \left[-\alpha a^2\cos^2\omega t - \beta a^3\cos^3\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)} a\cos\omega t\right]$$

$$\begin{aligned}\cos^2\omega t &= \frac{1}{2}\left(\cos 2\omega t + 1\right) \\ \cos 3\alpha &= \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{3i\alpha} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\alpha}\right)^3 = \mathrm{Re}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)^3 \\ &= \mathrm{Re}\left(\underline{\cos^3\alpha} + i3\cos^2\alpha\sin\alpha - \underline{3\cos\alpha\sin^2\alpha} - i\sin^3\alpha\right) \\ \cos^3\alpha &= \cos 3\alpha + 3\cos\alpha\,\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} \\ &\cdots \\ \cos^3\alpha &= \frac{1}{4}\cos 3\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(1)} + \omega x^{(1)} &= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t - \frac{\beta a^3}{4}\cos 3\omega t \\ &\quad -\frac{3}{4}\beta a^3\cos\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)} a\cos\omega t \\ \text{Ansatz:}\qquad x^{(1)} &= -\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \underbrace{C_1\cos 2\omega t + C_2\sin 2\omega t}_{\text{Oberschwingungen, Obertöne}} + C_3\cos 3\omega t \\ &\quad + C_4\sin 3\omega t + \underbrace{C_5 t\cos\omega t + C_6 t\sin\omega t}_{\text{Resonanz ???}}\end{aligned}$$

Zeichen von mangelnder Konvergenz!

$$\omega^{(1)} = \frac{3}{8}\frac{\beta a^2}{\omega_0} \qquad \text{(dann verschwindet Resonanzterm)} \tag{3.33}$$

Grundfrequenz amplitudenabhängig!

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = \frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2}\cos 2\omega t - \frac{\beta a^3}{4}\cos 3\omega t$$

$$x^{(1)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2}\cos 2\omega t + \frac{\beta a^3}{32\omega^2}\cos 3\omega t \tag{3.34}$$

Erzwungene Schwingung ohne Resonanz

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\lambda\alpha x^2 + f_1 \cos\omega_1 t + f_2 \cos\omega_2 t \tag{3.35}$$
$$x = x^{(0)} + \lambda x^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} - \omega_0^2 x^{(0)} &= f_1 \cos\omega_1 t + f_2 \cos\omega_2 t \\ x^{(0)} &= A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{aligned}$$

$$A_i = \frac{f_i}{\omega_0^2 - \omega_i^2}$$

$x^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -\alpha \left(x^{(0)}\right)^2 \\ &= -\alpha\{A_1^2 \cos^2(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t - \varphi_2) + \dots \\ &\quad +2A_1 A_2 \cos\underbrace{(\omega_1 - \varphi_1)}_{\gamma} \cos\underbrace{((\omega_2 t - \varphi_2)}_{\delta}\} \end{aligned}$$

$$\cos\gamma\cos\delta = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta}_{\cos(\gamma+\delta)} + \underbrace{\cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta}_{\cos(\gamma-\delta)}\right]$$

Summen und Differenzen der Erregerfrequenz

$$\begin{matrix} \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_1 - \omega_2 \end{matrix} \qquad \text{„Kombinationstöne“}$$

Erzwungene Schwingung mit Resonanz

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= f\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 \\ \ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega^2 x &= f\cos\gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) x \end{aligned} \tag{3.36}$$

Lösen der homogenen Gleichung ...

$$\overset{3.33}{\Longrightarrow} \qquad \omega = \omega_0 + \underbrace{\frac{3\beta}{8\omega_0}}_{\varkappa} a^2$$

Amplitude b: $\qquad \omega = \omega_0 \varkappa b^2$

$$\overset{3.28}{\Longrightarrow} \qquad A = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2}}$$

früher	$\rightarrow$	jetzt
ω	$\rightarrow$	γ
ω_0	$\rightarrow$	ω
A	$\rightarrow$	b

$$b = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)^2 + \Gamma\gamma^2}}$$

$$\omega = \omega(b)$$

$$b^2 \left[\underbrace{(\gamma+\omega)^2}_{\approx 4\omega_0^2} (\gamma-\omega)^2 + \underbrace{\Gamma^2\gamma^2}_{\approx \omega_0^2} \right] = f^2$$

$$b = b(\omega)$$

$$b^2 \left[\left(\gamma - \underbrace{\omega_0 - \varkappa b^2}_{\omega} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right] = \frac{f^2}{4\omega_0} \qquad \text{kubische Gleichung für } b^2(\varepsilon)$$

$$\gamma - \omega_0 =: \varepsilon$$

Suche $\varepsilon(b) \Longrightarrow$ quadratische Gleichung

$$\left(\varepsilon - \varkappa b^2\right)^2 = \frac{f^2}{4\omega_0 b^2} - \frac{\Gamma^2}{4}$$

3.2.3 Parametrische Resonanz

Beispiel 1: Schaukel

Idealisiert: Pendel mit Pendellänge $l(t)$.

$$l(t+T) = l(t)$$

Beispiel 2: Oszillator mit variierender Federkonstante

$$\ddot{q} = -\omega^2(t) qomega(t+T) = \omega(t) \qquad \text{Hillsche Dgl} \tag{3.38}$$

Beispiel 3: Pendel mit periodisch auf- und abbewegtem Aufhängepunkt

Nur geringfügige Änderung der Parameter:

$$\ddot{x} = -\omega^2 (1 + \varepsilon \cos t)\, x \qquad \text{Mathieusche Dgl} \tag{3.39}$$

$$\varepsilon \ll 1 \qquad T = 2\pi$$

Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& x_2 \\ \dot{x}_2 &=& -\omega^2(t) x_1 \end{array}\right\} \tag{3.40}$$

$$\omega(t+T) = \omega(t)$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& \underline{x} \\ x_2 &=& \dfrac{p}{m} = \underline{v} \end{array}$$

Bewegung: „Strömung im Phasenraum“
Lionville: In hamiltonschen Systemen ist die Strömung inkompressibel.

Bewegung: Abbildung des Phasenraumes auf sich selbst

Stroboskopische Abbildung: Abbildung nach einer Periode T

$$A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$\underbrace{A}_{\text{Matrix}} \underbrace{\underline{x}(0)}_{\text{Vektor}} = \underline{x}(T)$$

Beispiel 1: Drehung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

T beliebig

$$\ddot{x}_1 = -x$$

$$\begin{aligned} x &= A\cos t + B\sin t \\ \dot{x} &= -A\sin t + B\cos t \\ x &= x_0\cos t + \dot{x}_0\sin t \\ \dot{x} &= -x_0\sin t + \dot{x}_0\cos t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Beipiel 2: „Hyperbolische Drehung“

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= A\,\mathrm{e}^{t} \\ x_2 &= B\,\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

Theoreme

1. x_0 ist Fixpunkt der Abbildung A ($Ax_0 = x_0$) genau dann, wenn die Lösung der Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen x_0 periodisch mit der Periode T ist.

2. Die periodische Lösung der Bewegungsgleichung ist (Lyapunov-)stabil genau dann, wenn der Fixpunkt x_0 der Abbildung A Lyapunov-stabil ist.

$$x(t), v(t) \qquad \Delta x, \Delta v$$

$$x(t) \pm \Delta x \qquad v(t) \pm \Delta v$$

$$\delta x_0 \qquad \delta v_0$$

3. Wenn die Bewegungsgleichung linear ist, dann ist auch die Abbildung A linear.

4. Wenn das System hamiltonsch ist, dann ist A volumenerhaltend.

Triviale Lösung von (3.38) oder (3.39) stabil, wenn Abbildung A in der Ebene stabil ist.
Behauptung: Die Abbildung A (in der Ebene) ist stabil, wenn $|\operatorname{Sp}(A)| < 2$ und instabil wenn $|\operatorname{Sp}(A)| > 2$ ist.
Untersuche Eigenwertgleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{11}a_{22} - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \lambda^2 - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\lambda^2 - \operatorname{Sp} A\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\operatorname{Sp} A)^2 - 1}$$

$|\operatorname{Sp} A| > 2$ Lösungen reell
$|\operatorname{Sp} A| < 2$ Lösungen komplex konjugiert

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Sp} A$$

$$\lambda_1\lambda_2 = 1$$

Komplexe Lösungen: $\mathrm{e}^{\pm i\alpha}$
Reelle Lösungen: „hyperbolische Drehungen“

$$\overset{3.39}{\Longrightarrow} \ddot{x} = -\omega^2\big(1 + \varepsilon \underbrace{\cos t}_{\Omega}\big)x$$

„Starke Stabilität“

Die triviale Lösung eines hamiltonschen linearen Systems ist stark stabil, wenn sie stabil ist und wenn die triviale Lösung eines hinreichend benachbarten hamiltonschen Systems ebenfalls stabil ist.
Alle Punkte auf der ω-Achse sind stabil außer ganz- und halbzahligen Werten von ω ($\omega = \frac{k}{2}, k = 0, 1, 2, \ldots$).

$$k = 0 \qquad \ddot{x} = 0 \qquad \text{instabil}$$

Lösung für $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\omega^2 x \\
x_1 &= \underbrace{A}_{x_1(0)} \cos\omega t + \underbrace{B}_{\frac{1}{\omega}x_2(0)} \sin\omega t \\
x_1 = x_2 &= \underbrace{-A\omega}_{-\omega x_1(0)} \sin\omega t + \underbrace{B\omega}_{x_2(0)} \cos\omega t
\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$t = 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sp} A &= 2|\cos\omega t| \\
\operatorname{Sp} A &= 2 \text{ für } \omega = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Hamiltonsche Mechanik

Hamiltonsche Bewegungsgleichung

Lagrange-Funktion $L = T - V$ oder $L = T - U$

$$L = L(q^j, \dot{q}^j, t) \tag{4.1}$$

q^j und $\dot{q}^j$ werden als unabhängige Variablen betrachtet.

$$\dot{q}^j = \frac{dq^j}{dt} \qquad \text{Bewegungsgleichnung} \tag{4.2}$$

Einführung anderer Variablen:

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \qquad \text{Definition} \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}}_{p_j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \qquad \text{Bewegungsgleichung} \tag{4.4}$$

$t, q, \dot{q}, p, \dot{p}$

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ dL &= \dot{p}\, dq + p\, d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Andere Variablen statt $q, \dot{q}, t \to q, p, t$

4.1 Legendretransformation

$$f(x) \qquad \frac{df}{dx} =: u(x)$$

$$u(x) \qquad x(u)$$

$x \to u$

$$\tilde{f}(u) = f(x(u))$$

Legendre-transformierte

$$g(u) := u\,x(u) - f(x(u))$$

$$\frac{dg}{du} = x(u) + u\frac{dx}{du} - \underbrace{\frac{df}{dx}}_{u}\frac{dx}{du} = x(u)$$

Legendre-transformierte von $g(u)$

$$h(x) = x\,u(x) - g(u(x)) = \underbrace{x\,u(x) - u(x)\,x(u(x))}_{0} + f(x(u(x)))$$

$$x(u) = \frac{dg}{du} \qquad \frac{dx}{du} = \frac{d^2g}{du^2} = \frac{1}{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{\frac{df}{dx^2}} \neq 0$$

$$h(x) = f(x)$$

4.1.1 Verallgemeinerung auf mehrere Variablen

$$F(x_1, \ldots, x_f, y_1, \ldots, y_f)$$

$$u_k = \tfrac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_f, y_1, \ldots, y_f) \tag{5a}$$

$$\det\left(\tfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \neq 0 \tag{5b}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}\right)$$

Auflösen

$$x_i = x_i(u_i, \ldots, u_f, y_1, \ldots, y_f)$$

$$G(u_1, \ldots, u_f, y_1, \ldots y_f) = \textstyle\sum_k u_k x_k\,(u, y) - F \tag{5c}$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i$$

$$\begin{aligned} dG &= du_k x_k + \overbrace{u_k\frac{\partial x_k}{\partial u_l}du_l + u_k\frac{\partial x_k}{\partial y_i}dy_i}^{u_k dx_k} \\ &\quad \underbrace{-\frac{\partial F}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial u_k}du_k - \frac{\partial F}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial y_i}dy_i}_{\frac{\partial F}{\partial x_l}dx_l} - \frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i \\ &= x_k du_k - \frac{\partial F}{\partial y_k}dy_k \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u_k} = x_k \qquad \frac{\partial G}{\partial y_k} = -\frac{\partial F}{\partial y_k}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u_k \partial u_l}\right) \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 1 \tag{5d}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

$$\left.\begin{array}{rcll} p_i & = & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} & \text{(Definition)} \\ \dot{p}_i & = & \frac{\partial L}{\partial q_i} & \text{(Bewegungsgleichung)} \end{array}\right\}$$

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}(p, q, t), t) \tag{4.7}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}\right) = \det\left(\frac{\partial p^i}{\partial \dot{q}^k}\right) \neq 0 \tag{4.6}$$

Hamiltonsche Funktion:

$$q^i = q^i(p, q, t)$$

$$dH = dp_i \dot{q}^i + p_i d\dot{q}^i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{\dot{p}_i} dq^i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}_{p_i} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{q}^i & = & \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i & = & -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Hamiltonsche Kanonische} \\ \text{Bewegungsgleichungen} \end{array} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{dH}{dt} & = & \dot{q}^j \frac{dp_j}{dt} - \dot{p}_j \frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{dH}{dt} & = & \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{array} \tag{4.9}$$

Skleronomes System

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad H = \text{ const}$$

$$H = \underbrace{\sum_i p_i \dot{q}^i}_{2T} - (T - V) = E \tag{4.10}$$

Zyklische Koordinaten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l}\right) = \frac{d}{dt} p_l = \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0$$

q^l (zyklische Koordinaten)

$$\left.\begin{array}{rcccll} \dot{p}_l & = & -\frac{\partial H}{\partial q^l} & = & 0 & \Longrightarrow p_l = \alpha \text{ (Integrationskonstante)} \\ \dot{q}^l & = & \frac{\partial H}{\partial p_l} & = & \frac{\partial H}{\partial \alpha} & \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

4.2 Kanonische Transformation

$$L \qquad \int L\,dt \to \text{stationär}$$

$$Q^j = Q^j(q^k, t) \qquad \text{Punkttransformation}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} Q^j &=& Q^j(q^k, p_k, t) \\ P_j &=& P_j(q^k, p_k, t) \end{array}\right\} \tag{4.12}$$

$$\delta \int \left[\sum_i p_i \dot{q}^i - H(p,q,t)\right] dt = 0 \tag{4.13}$$

$$\delta \int \left[\sum_i P_i \dot{Q}^i - \underbrace{K(P,Q,t)}_{\text{neue Hamiltonfunktion}}\right] dt = 0 \tag{4.14}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = F(t_2) - F(t_1) = \text{const}$$

$$F = F_1(q^1, \ldots, q^f, Q^1, \ldots, Q^f, t) = F_1(q, Q, t) \tag{4.15}$$

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i}\dot{Q}^i \tag{4.16}$$

$$\frac{dF_1}{dt} = p_i \dot{q}^i - P_i \dot{Q}^i + K - H \tag{4.17}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p_i &=& \frac{\partial F_1}{\partial q^i} \\ P_i &=& -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \\ K &=& H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

f Beziehungen p_i, q, Q, t auflösen nach $Q^i = Q^i(p, q, t)$
F_1: Erzeugende der kanonischen Transformation
andere Möglichkeiten:

$$F_2(q, P, t) \qquad F_3(p, Q, t) \qquad F_4(p, P, t) \tag{4.20}$$

$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}(q, Q, t)$ auflösen nach Q, im Punkt 0 soll Gleichung erfüllt sein.

$$\delta p_i = \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^i}\delta q^k + \frac{\partial^2 F}{\partial Q^k \partial q^i}\delta Q^k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^i}\delta t$$

Lineares Gleichungssystem für $\delta Q^k, \delta p^i, \delta q^k, \delta t$ gegeben.

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q^k \partial q^i}\right) \neq 0 \tag{4.19}$$

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_j P_j Q^j$$

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F_2}{\partial P_j}\dot{P}_j + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$\sum_j p_j\dot{q}^j - H = \sum_j \underline{P_j\dot{Q}_j} - K + \frac{d}{dt}\Bigg(F_2(q,P,t) \underbrace{- \sum_j P_j Q^j}_{-\dot{P}_j Q^j - \underline{P_j\dot{Q}_j}}\Bigg)$$

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_j p_j\dot{q}^j + \sum_j Q^j\dot{P}_j + K - H \tag{4.22}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p_j & = & \frac{\partial F_2}{\partial q^j} \\ Q^j & = & \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \\ K & = & H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{array}\right\} \text{ nach } P_j \text{ als Funktion von } q,p,t \text{ auflösen} \tag{4.23}$$

Beispiel 1: Identität

$$\begin{array}{rcl} F_2 & = & q^j P_j \\ p_j & = & P_j \\ Q^j & = & q^j \\ K & = & H \end{array} \tag{4.24}$$

Beispiel 2: Vertauschung von Koordinaten und Impulsen

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & \sum_j q^j Q^j \\ & \cdots & \\ p_i & = & Q^i \\ P_i & = & -q^i \end{array}$$

Beispiel 3: Punkttransformation

$$F_2 = \sum_j f^j(q^1,\ldots,q^f,t)P_j \tag{4.25}$$

$$\overset{4.23}{\Longrightarrow} \quad Q^j = f^j(q^1,\ldots,q^f,t) \qquad \text{Punkttransformation}$$

4.2.1 Die Poisson-Klammern

$$g(q,p,t)$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{dg}{dt} & = & \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial g}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ & = & \frac{\partial g}{\partial t} + \left(\frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\right) \\ & = & \frac{\partial g}{\partial t} + \{g,H\} \end{array} \tag{4.26}$$

Definition: Poisson-Klammern

$$\{f,g\} := \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{4.27}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{q}^i &=& \{q^i, H\} \\ \dot{p}_i &=& \{p_i, H\} \end{array}\right\} \quad \text{Hamiltonsche kanonische Gleichungen} \tag{4.28}$$

Ausblick: Quantenmechanik

$$\frac{d}{dt}A = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[A,H]$$

$$\underbrace{[A,H]}_{\text{Kommutator}} = AH - HA$$

Beispiel: Kanonische Transformation des harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}q^2 \\ F_1 &= \frac{m}{2}\omega_0 q^2 \cot Q \\ p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega_0 q \cot Q \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega_0 q^2}{2\sin^2 Q} \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} &= 0 \Longrightarrow K = H \\ q &= \sin Q \sqrt{\frac{2p}{m\omega_0^2}} \\ p &= \sqrt{m\omega_0 2P}\cos Q \\ H &= P\omega_0 \quad \text{zyklisch in } Q \Longrightarrow P = \text{const} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} P &= \text{const} \\ \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \omega_0 \\ Q &= \omega_0 t + \varphi_0 \\ q &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ p &= \ldots \end{aligned}$$

Die Hamiltonsche Mechanik führt schließlich auf die *Hamilton-Jacobische Theorie*.

Teil II

Elektrodynamik

Kapitel 5

Die Maxwellschen Gleichungen

Elektrisches Feld $\vec{E}$ und magnetisches Feld $\vec{B}$

$$\vec{F} = q\vec{E} + \kappa q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{Lorentz-Kraft} \tag{5.1}$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \kappa\vec{j} \times \vec{B} \qquad \text{Kraftdichte} \tag{5.1a}$$

5.1 Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla\vec{E} &= k_1\rho && \text{(a)} \\ \nabla \times \vec{E} &= -k_2\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \text{(b)} \\ \nabla\vec{B} &= 0 && \text{(c)} \\ \nabla \times \vec{B} &= k_3\vec{j} + k_4\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} && \text{(d)} \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten
(b) mit (5.1) vergleichen:

$$\begin{aligned} k_2 &= \kappa \\ k_3 \operatorname{div}\vec{j} &= -k_4 \operatorname{div}\frac{\partial E}{\partial t} \\ &= -k_4 k_1 \frac{\partial\rho}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Ladungserhaltung: $k_3 = k_1 k_4$

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \\ k_3 &= \kappa\mu_0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla\vec{E} &= \tfrac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(a)}\\ \nabla\times\vec{E} &= -\kappa\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \text{(b)}\\ \nabla\vec{B} &= 0 && \text{(c)}\\ \nabla\times\vec{B} &= \kappa\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) && \text{(d)} \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Annahme: ρ und $\vec{j}$ vorgegeben
Anfangsbedingungen: $\vec{E}(t_0,\vec{r}), \vec{B}(t_0,\vec{r})$
Voraussetzung: Felder analytisch, d. h.

- Taylorreihe in t mit Konvergenzradius > 0
- Alle zeitlichen Ableitungen durch (5.2) bestimmt

Andere Anfangsbedingungen: $\vec{E}(t_0,\vec{r})$ oder $\vec{B}(t_0,\vec{r})$ und $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(t_0,\vec{r})$

Satz

Ein Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$, das für $|\vec{r}| \to \infty$ „hinreichend“ rasch verschwindet, ist durch $\nabla\vec{V} = D(\vec{r})$ und $\nabla\times\vec{V} = \vec{R}(\vec{r})$ eindeutig festgelegt.

Beweis

$$\vec{V}_1, \vec{V}_2 \qquad \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

$$\begin{aligned} \nabla\vec{V} &= 0\\ \nabla\times\vec{V} &= 0\\ \Longrightarrow V &= \nabla\Phi\\ \triangle\Phi &= \nabla^2\Phi = 0\\ \int_{\partial W} d\vec{f}\,\varphi\nabla\psi &= \int_W d^3x\ (\varphi\triangle\psi + \nabla\varphi\nabla\psi)\\ \Phi(r\to\infty) &\to 0\\ \int_W d^3x\,|\nabla\Phi|^2 &= \int_{\partial W} d\vec{f}\,\Phi\nabla\Phi \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\\ &\quad \text{wenn } \Phi\nabla\Phi \text{ rascher abfällt als } \tfrac{1}{r^2}\\ &\quad \Phi \sim r^{-\frac{1}{2}}\\ &\quad \Phi \sim r^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$\nabla\Phi$ muß stärker als $r^{-\frac{3}{2}}$ für $r\to\infty$ abfallen.

$$|\nabla\Phi| = 0 \Leftrightarrow \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0 \qquad \square$$

5.1.1 Maßsysteme in der Elektrodynamik

$$\kappa^2\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{5.4}$$

SI – System International

MKSA-System

$$\left.\begin{array}{rcl} \kappa & = & 1 \\ \text{Ampere-Definition} \Longrightarrow \varepsilon_0 & = & \frac{10^7}{4\pi}\frac{1}{c^2}\frac{A^2}{N} \\ \mu_0 & = & 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{N}{A^2} \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

Gaußsches Maßsystem

$$\left.\begin{array}{rcl} \kappa & = & \frac{1}{c} \\ \varepsilon_0 & = & \frac{1}{4\pi} \\ \mu_0 & = & 4\pi \end{array}\right\} \tag{5.6}$$

$$[q] = \sqrt{\text{Kraft}} \cdot \text{Länge}$$

Heaviside-Lorentz-System

$$\left.\begin{array}{rcl} \kappa & = & \frac{1}{c} \\ \varepsilon_0 & = & 1 \\ \mu_0 & = & 1 \end{array}\right\} \tag{5.7}$$

„Natürliche Einheiten“ $c = 1$

$$\begin{aligned} \nabla\vec{E} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \\ \nabla\vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \dot{\vec{E}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{natürliche Einheiten} & \rightarrow & \text{konventionelle Einheiten} \\ dt & \rightarrow & c\,dt \\ \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \rightarrow & \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{j} & \rightarrow & \dfrac{1}{c}\vec{j} \quad \text{usw.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rclcrcl} \vec{E}_H & = & \sqrt{\varepsilon_0}\vec{E} & & \rho_H & = & \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon_0}} \\ \vec{B}_H & = & \frac{\vec{B}}{\sqrt{\mu_0}} & & \vec{j}_H & = & \frac{\vec{j}}{\sqrt{\varepsilon_0}} \end{array}\right\} \tag{5.8}$$

2 Sätze

$$\begin{array}{lrcl} 1.) & \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) = 0 & \longleftrightarrow & \exists\varphi(\vec{r}),\quad \vec{v} = \nabla\varphi \\ 2.) & \nabla\vec{v}(\vec{r}) = 0 & \longleftrightarrow & \exists\vec{A}(\vec{r}),\quad \vec{v} = \nabla \times \vec{A} \end{array}$$

Potentiale

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5.9}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5.10}$$

Eichfreiheit

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \vec{A} & \to & \vec{A}' & = & \vec{A} + \nabla\chi \\ \Phi & \to & \Phi' & = & \Phi - \kappa \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

$\chi = \chi(\vec{r}, t)$ beliebige Eichtransformation

$$-\nabla^2 \Phi - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) = \underline{\nabla \left(\nabla \vec{A} \right)} - \nabla^2 \vec{A} = \kappa \mu_0 \vec{j} - \kappa \varepsilon_0 \mu_0 \left(\underline{\frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi} + \kappa \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\nabla \vec{A} = -\frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\nabla \vec{A} + \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{Lorentz-Bedingung, Lorentz-Eichung} \tag{5.12}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcll} \Box \Phi & := & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - \triangle \Phi & = & \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(a)} \\ \Box \vec{A} & = & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \triangle \vec{A} & = & \kappa \mu_0 \vec{J} & \text{(b)} \end{array}\right\} \text{D'Alembert-Operator} \tag{5.13}$$

$$\nabla \left(\vec{A} + \nabla \chi \right) + \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi - \kappa \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{wenn} \qquad \nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Box \chi = 0 \qquad \chi\text{: „residuale Eichtransformation“} \tag{5.14}$$

$$\nabla \vec{A} = 0 \qquad \text{Coulomb-Eichung} \tag{5.15}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcll} 5.2 \Longrightarrow \triangle \Phi & = & -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} & & \text{(a)} \\ & & \Phi\text{: instantanes Potential} & & \\ \Box \vec{A} & = & \kappa \mu_0 \left(\vec{j} - \varepsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) =: \vec{j}_t & & \text{(b)} \\ & & \vec{j}_t\text{: „transversal Strom“} & & \end{array}\right\} \tag{5.16}$$

$$\nabla \vec{j}_t = \ldots = 0$$

Wenn $\rho \equiv 0$ $\Phi = 0$ wählen.

$$\text{residuale Eichtransformation} \qquad \triangle \chi = 0 \tag{5.17}$$

5.1.2 Energie des elektromagnetischen Feldes

ρ^E Energiedichte $\quad \vec{j}^E$ Energie-Stromdichte

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \nabla \vec{j}^E = q^E \qquad \text{„Quelldichte“} \tag{5.18}$$

$$W(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{V} \underbrace{\vec{F}}_{\text{Lorentzkraft}} = q \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{v}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{v}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$$

$$q\vec{v} \to \vec{j} d^3x$$

$$qE = -\vec{j}\cdot\vec{E} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
-\vec{j}\cdot\vec{E} &= \underline{\vec{E}}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\kappa\mu_0}\underline{\nabla\times\vec{B}}\right) \\
&= \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\kappa\mu_0} \underbrace{\vec{E}\left(\nabla\times\vec{B}\right)}_{-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)} \\
&= \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\kappa\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) - \frac{1}{\kappa\mu_0}\vec{B}\cdot\underbrace{\nabla\times\vec{E}}_{-\kappa\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \\
\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \nabla\vec{j}^E &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 - \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) + \frac{1}{\kappa\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\rho^E = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{5.21}$$

$$\vec{j}^E = \underbrace{\vec{S}}_{\text{Poynting-Vektor}} := \frac{1}{\kappa\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \tag{5.22}$$

$$\rho^{E'} = \rho^E + \nabla\cdot\vec{C}$$

$$\vec{j}^{E'} = \vec{j}^E - \frac{\partial\vec{C}}{\partial t} + \nabla\times\vec{F}$$

$\vec{C} = \vec{F} = 0 \qquad$ experimentell ermittelt

$$\left.\begin{aligned} U &= U^e + U^m \\ U^e &= \tfrac{\varepsilon_0}{2}\int d^3x\, E^2 \\ U^m &= \tfrac{1}{2\mu_0}\int d^3x\, B^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

Im stationären Fall:

$$\left.\begin{array}{lcll} U^e & = & -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3x\,\vec{E}\cdot\nabla\times\Phi \overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3x\,\Phi\nabla\cdot\vec{E} & \\ U^e & = & \frac{1}{2}\int d^3x\,\rho\Phi & \text{(a)} \\ U^m & = & \frac{1}{2\mu_0}\int d^3x\,B^2 = \frac{1}{1\mu_0}\int d^3x\,\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} & \\ & \overset{\text{part. Int.}}{=} & \frac{1}{2\mu_0}\int d^3x\,\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} & \\ U^m & = & \frac{\kappa}{2}\int d^3x\,\vec{A}\vec{j} & \text{(b)} \end{array}\right\} \quad (5.24)$$

5.1.3 Impuls

ρ_i^P: i-te Komponente der Impulsdichte
$\vec{j}_i^P$, j_{ik}^P: k-te Komponente der Impulsstromdichte der i-ten Impulskomponente

Bilanzgleichung

$$\frac{\partial\rho_i^P}{\partial t} + \partial_k j_{ik}^P = -f_i \overset{5.1}{=} -\rho E_i - \kappa\varepsilon_{ikl} j_k B_l \quad (5.25)$$

...

$$\rho_i^P = \kappa\varepsilon_0\varepsilon_{ikl}E_k B_l \quad (5.26)$$

$$\rho_i^P = \frac{1}{c^2}S_i$$

$$j_{ik}^P = \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}E^2\delta_{ik} - E_iE_k\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}B^2\delta_{ik} - B_iB_k\right) \quad (5.27)$$

$$j_{ik}^P = -T_{ik} \qquad T\text{: Maxwellscher Spannungstensor}$$

Beispiel: „Homogenes elektrisches Feld“

$$\vec{E} = E\vec{e}_z$$

$$(T_{ik}) = \frac{\varepsilon}{2}E^2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

„Feldlinien stoßen sich gegenseitig ab und suchen sich zu verkürzen.“

5.1.4 Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \qquad \text{Bezugspunkt: Ursprung}$$

analoge Überlegung ...

$$\rho_i^L = \varepsilon_{ijl}x_j\rho_l^P \quad (5.28)$$

$$j_{ik}^L = \varepsilon_{ijl}x_j j_{lk}^P \quad (5.29)$$

5.2 Elektrostatik

$$\begin{aligned} \nabla\vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\vec{E} &= 0 \Longrightarrow \vec{E} = -\nabla\Phi \qquad (5.30) \\ \triangle\Phi &= -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \text{Poisson-Gleichung} \qquad (5.31) \end{aligned}$$

Bei gegebener Ladungsdichte:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \text{Coulomb-Gesetz} \qquad (5.32) \\ -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (5.33) \\ \triangle G(\vec{r},\vec{r}') &= -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad \text{Greensche-Funktion} \qquad (5.34) \\ \Phi(\vec{r}) &= \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}G(\vec{r},\vec{r}') \qquad (5.35) \\ \triangle\Phi(\vec{r}) &= \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}\underbrace{\triangle G(\vec{r},\vec{r}')}_{-\delta(\vec{r}-\vec{r}')} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Sphärische Polarkoordinaten

$$\vec{r}-\vec{r}'\to\vec{r} \qquad G(\vec{r},\vec{r}') = G(|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

$$\triangle = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rG(r)\right) = -\delta(\vec{r})$$

außerhalb:
$r=0$: $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rG) = 0 \qquad rG = ar+b$
$r\to\infty$: $G\to 0 \Longrightarrow a = 0$
Integriere (5.34) über kleine Kugel

$$\begin{aligned} \text{rechte Seite} \qquad -1 &= \int_K d^3r\,\triangle G = \oint_{\partial K} d\vec{S}\cdot\nabla G = \oint_{\partial K} d\vec{S}\cdot\left(-\frac{b}{r^2}\vec{e}_r\right) \\ &= \int\left(-\frac{b}{r^2}\right)dS = -4\pi b \Longrightarrow b = \frac{1}{4\pi} \end{aligned}$$

$$G(\vec{r},\vec{0}) = \frac{1}{4\pi r}$$

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (5.36)$$

$$\triangle\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \qquad (5.37)$$

5.2.1 Randbedingungen

Elektrischer Leiter: frei bewegliche Ladungen

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = 0 = \vec{E}_t \cdot \Delta\vec{l}$$

$$\vec{E}_t = 0 \tag{5.38}$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = E_\perp \Delta S = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{5.39}$$

Dirichtletsche Randbedingungen

Φ auf S gegeben.

$$\Phi(L_i) = U_i \tag{5.40}$$

Poisson- oder	$\triangle\Phi$	$=$	$-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Laplace-Gleichung	$\triangle\Phi$	$=$	0

$$E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E_\perp = -\nabla\Phi\vec{r} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n}$$

Von Neumannsche Randbedingungen

$\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ am Rand gegeben.

$$-\varepsilon_0 \oint \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, dS = -\varepsilon_0 \oint \nabla\Phi \cdot d\vec{S} = Q_i \tag{5.42}$$

5.2.2 Formale Lösung mit Hilfe Greenscher Funktion

$$\triangle' G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{5.43}$$

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{|}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} + \chi(\vec{r},\vec{r}') \tag{5.44}$$

wobei $\triangle'\chi(\vec{r},\vec{r}') = 0$

Greenscher Satz II

$$\int_G (\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi)\, dV = \oint_{\partial G} (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\, d\vec{S}$$

Variable $\vec{r}', \varphi = \Phi, \psi = G(\vec{r},\vec{r}')$

$$\int_V \big(\Phi \underbrace{\triangle' G(\vec{r},\vec{r}')}_{-\delta(\vec{r}-\vec{r}')} - G(\vec{r},\vec{r}') \underbrace{\triangle'\Phi}_{-\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}}\big)\, dV' = \oint_{\partial V} (\Phi\nabla' G(\vec{r},\vec{r}') - G(\vec{r},\vec{r}')\nabla'\Phi)\, d\vec{S}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} dV' - \oint_{\partial V} \Phi\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')\, d\vec{S} + \oint_{\partial V} \nabla'\Phi G(\vec{r},\vec{r}')\, d\vec{S}' \tag{5.45}$$

Dirichtletsche Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Randbedingung für} & G(\vec{r},\vec{r}') & = & 0 \\ \text{auf der Oberfläche} & \vec{r}' & \in & \partial V \end{array}\right\} \tag{5.46}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}\,dV' - \oint_{\partial V} \Phi \nabla' G(\vec{r},\vec{r}')\,d\vec{S} \tag{5.47}$$

G: Lösung des elektrostatischen Problems mit $U_i = 0$ und in $\vec{r}$ Ladung ε_0.

Ladungen auf Konduktoren gegeben

$$Q_i = -\varepsilon_0 \int_{S_i} \nabla' \Phi \, d\vec{S}' \tag{5.48}$$

$d\vec{S}$ nach außen

Randbedingungen für G:

$$\left.\begin{array}{rcl} \oint_{S_i} \nabla' G(\vec{r},\vec{r}')\,d\vec{S}' & = & 0 \\ G(\vec{r},\vec{r}') & = & \text{const} \quad \text{für} \quad \vec{r}' \in S_i \end{array}\right\} \tag{5.49}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0} d^3r' + \sum_i G(\vec{r},\vec{r}_{i0}) \underbrace{\oint_{S_i} \nabla'\Phi \cdot d\vec{S}}_{\frac{Q_i}{\varepsilon_0}} \tag{5.50}$$

$d\vec{S}$ nach innen

$$Q_n = -\int \rho\, dV - \sum_{i\neq n} Q_i \tag{5.51}$$

$$G : U_n = 0 \tag{5.52}$$

5.2.3 Methode der elektrischen Bilder

Spiegelung an einer Kugel

$\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ sei Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Psi(r',\vartheta,\varphi) = \frac{a}{r'}\Phi(\frac{a^2}{r'},\vartheta,\varphi)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')d^3r}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + x_i' \frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\bigg|_{r'=0} + \frac{1}{2!}x_i'x_j'\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\bigg|_{r'=0} + \ldots$$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, d^3r'}_{Q} + \frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\bigg|_{r'=0}\int x_i'\rho(\vec{r}')d^3r' \right. \\ &\left. + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{r'=0}\int x_i'x_j'\rho\, d^3r' + \ldots\right\} \end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} p_i &=& \int x_i' \rho(\vec{r}')\, d^3r' \\ \vec{p} &=& \int \vec{r}' \rho(\vec{r}')\, d^3r' \end{array}\right\} \tag{5.55}$$

Vom Bezugspunkt unabhängig, wenn $\int \rho\, d^3r = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} Q_{ij} &=& \int x_i' x_j' \rho(\vec{r}')\, d^3r' \\ \underline{\underline{Q}} &=& \int \vec{r}' \circ \vec{r}' \rho(\vec{r}')\, d^3r' \end{array}\right\} \tag{5.56}$$

Kugelflächenfunktion $\qquad Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$\tilde{Q}_{ij} = 3Q_{ij} - \delta_{ij} Q_{kk} \tag{5.57}$$

5.2.4 Elektrisches Dipol

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \tag{5.58}$$

Kraft auf Dipol

$$\vec{F} = \vec{p} \nabla \vec{E} \tag{5.59}$$

Dipolmoment

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{5.60}$$

5.3 Magnetostatik

$$\begin{array}{rcll} \nabla \vec{B} &=& 0 & \\ \vec{B} &=& \nabla \times \vec{A} & \\ \nabla \vec{A} &=& 0 & \text{Coulomb-Eichung} \\ \nabla^2 \vec{A} &=& -\kappa\mu_0 \vec{\jmath} & \\ \nabla \Phi &=& -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \\ \vec{A} &=& \dfrac{\kappa\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3r' & \end{array} \tag{5.61}$$

$$\vec{\jmath}\, d^3r' \to I\, d\vec{l} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Biot-Savard}$$

5.3.1 Multipolentwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ entwickeln um } r' = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\bigg|_{\vec{r}'=0} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\bigg|_{\vec{r}'=0} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} = \ldots = \frac{x_i}{r^3}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x_i' x_i}{r^3} + \ldots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \ldots$$

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{r}\underbrace{\int j_i\, d^3r'}_{=0\text{ , keine mag. Monopole}} + \frac{\vec{r}}{r^3}\int \vec{r}'\, j_i\, d^3r' + \ldots\right\}$$

$$\int \vec{r}'\,\vec{j}\,d^3r' \qquad \int x_i' j_k\, d^3r'$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x_l'} x_i' j_l x_k'\, d^3r' = 0 = \int\left\{\delta_{il} j_l x_k' + \underbrace{x_i \frac{\partial}{\partial x_l} j_j x_k'}_{=0\text{ wegen Ladungserh.}} + x_i' j_j \delta_{lk}\right\} d^3r$$

$$\left.\begin{array}{rcll} \int j_i x_k'\, d^3r' & = & -\int x_i' j_k\, d^3r' & \text{(a)} \\ \int \vec{r}\vec{r}'\,\vec{j}\,d^3r' & = & \frac{1}{2}\int (\vec{r}\vec{r}'\vec{j} - \vec{r}\vec{j}\vec{r}')\, d^3r' & \\ & = & \frac{1}{2}\vec{r}\times\int \vec{j}\times\vec{r}'\, d^3r' & \\ & = & \frac{1}{2}\left[\int (\vec{r}'\times\vec{j})\, d^3r'\right]\times\vec{r} & \text{(b)} \end{array}\right\} \tag{5.62}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\frac{\kappa}{2}\left[\int (\vec{r}'\times\vec{j})\, d^3r'\right]}_{\vec{m}\text{ magnetisches Dipolmoment}}\times\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{5.63}$$

$$\vec{m} = \kappa I \vec{F} \tag{5.64}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{m}\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right) \tag{5.65}$$

Stokescher Satz

$$\oint d\vec{l}\otimes g = \int \left(d\vec{F}\times\nabla\right)\otimes g$$

Kraft auf magnetisches Dipol

$$\vec{f} = \kappa\vec{j}\times\vec{B}$$

$$\vec{F} = \kappa\int \vec{j}\times\vec{B}_{\text{ext}}\, d^3r'$$

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_0 + \vec{r}'\cdot\nabla\vec{B}(0) + \ldots$$

$$\vec{F} = \kappa\underbrace{\int \vec{j}\times\vec{B}_0\, d^3r'}_{(\int\vec{j}\,d^3r')\times\vec{B}=0} + \kappa\int \vec{j}\times\left[\underline{\vec{r}'\cdot\nabla\vec{B}(0)}\right] d^3r' + \ldots$$

Anmerkung: In der folgenden Rechnung wirkt der ∇-Operator stets nur auf $\vec{B}$, auch wenn er räumlich davon getrennt steht!

$$\vec{r}'\times\underbrace{\left(\nabla\times\vec{B}\right)}_{0\text{ wo }\vec{j}\neq 0} = \nabla\vec{r}'\cdot\vec{B} - \underbrace{(\vec{r}'\cdot\nabla)\,\vec{B}}_{0}$$

$$\vec{\jmath}\times\left[\vec{r}'\cdot\nabla\vec{B}(0)\right]=\vec{\jmath}\times\nabla\left(\vec{r}'\cdot\vec{B}\right)=-\nabla\left(\vec{b}\cdot\vec{r}'\right)\times\vec{\jmath}=-\nabla\times\left(\vec{B}\cdot\vec{r}'\right)\vec{\jmath}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\kappa\nabla\times\int\left(\vec{B}\cdot\vec{r}'\right)\vec{\jmath}\,d^3r' \\
&\overset{5.62}{\Longrightarrow} \int\underbrace{\vec{r}}_{\to\vec{B}}\cdot\vec{r}'\vec{\jmath}\;d^3r'=\frac{1}{2}\int(\vec{r}'\times\vec{\jmath})\;d^3r'\times\underbrace{\vec{r}}_{\to\vec{B}} \\
\vec{F} &= -\nabla\times\underbrace{\frac{\kappa}{2}\int\vec{r}'\times\vec{\jmath}\,d^3r'}_{\vec{m}}\times\vec{B} \\
\vec{F} &= -\nabla\times\left(\vec{m}\times\vec{B}\right)=\vec{m}\cdot\nabla\vec{B} \qquad (5.66)
\end{aligned}$$

Drehmoment auf Dipol im Feld $\vec{B}$

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \kappa\int\vec{r}'\times\left(\vec{\jmath}\times\vec{B}_{\rm ext}(0)\right)d^3r' \\
&= \kappa\int\vec{\jmath}\left(\vec{r}'\cdot\vec{B}(0)\right)d^3r'-\kappa\,\underbrace{\vec{B}\int\vec{r}'\cdot\vec{\jmath}\,d^3r'}_{0} \\
&= \left(\frac{\kappa}{2}\int\vec{r}'\times\vec{\jmath}\,d^3r'\right)\times\vec{B} \\
\vec{N} &= \vec{m}\times\vec{B}(0) \qquad (5.67)
\end{aligned}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\qquad\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{Lorentz-Bedingung}\qquad\nabla\vec{A}-\frac{1}{\kappa c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\quad(5.12)$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\nabla^2\Phi &=& \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\vec{A} &=& \kappa\mu_0\vec{\jmath}\end{array}\right\}(5.13)\Longrightarrow\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\nabla\Psi=s(\vec{r},t)\qquad(5.68)$$

Kapitel 6

Zeitabhängige Lösungen der Maxwell-Gleichungen: Elektromagnetische Wellen

6.1 Die Greensche Funktion der Wellengleichung

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right] G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') \tag{6.69}$$

$$\rho(\vec{r},t) = \int d^3r'dt'\rho(\vec{r}',t')\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$$

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla\right] \Psi\delta(\vec{r})\delta(t) \tag{6.70}$$

$G:\quad \vec{r}'=0 \qquad$ Lösung: $\quad \vec{r}\to\vec{r}-\vec{r}'$

Für $r=0$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\underbrace{(r\Psi)}_{\chi} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad \Psi = \frac{\chi}{r} \tag{6.71}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} = 0$$

Die allgemeine Lösung für diese Differentialgleichung lautet:

$$\chi = \underbrace{f(r-ct)}_{\text{auslaufende Welle}} + \underbrace{g(r+ct)}_{\text{einlaufende Welle}}$$

Betrachtet wird im folgenden nur die auslaufende Welle.

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{f(t-\frac{r}{c})}{r} \qquad (6.72)\\ \nabla\Psi &= \nabla\left(\frac{1}{r}\right) f(t-\frac{r}{c}) + \frac{1}{2}\nabla f(t-\frac{r}{c}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2\Psi = \underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)}_{-4\pi\delta(\vec{r})} f(t-\frac{r}{c}) + 2\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\underbrace{\nabla f(t-\frac{r}{c})}_{f'\cdot\left(-\frac{1}{c}\frac{\vec{r}}{r}\right)} + \frac{1}{r}\underbrace{\nabla^2 f(t-\frac{r}{c})}_{f''\cdot\frac{1}{c^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)^2 - \frac{1}{c}f'\cdot\nabla\frac{\vec{r}}{r}}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi = \underline{\frac{1}{c^2}\frac{f''}{r}} + 4\pi\delta(\vec{r})f(t-\frac{r}{c}) - \underline{\underline{\frac{1}{c}f'\frac{\vec{r}}{r}2\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}}$$
$$\underline{-\frac{1}{c^2}f''\frac{1}{r}} + \underline{\underline{\frac{1}{c}f'\frac{2}{r^2}}} \stackrel{!}{=} \delta(\vec{r})s(t)$$

$$f(t) = \frac{s(t)}{4\pi} \qquad \Psi(\vec{r},t) = \frac{s(t-\frac{r}{c})}{4\pi r} \tag{6.73}$$

$$G(\vec{r},t;\vec{r}',t') = \frac{\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \text{Greensche Funktion der Wellengleichung} \tag{6.74}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \tfrac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}',t')\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'\,dt' \\ \Phi(\vec{r},t) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t')\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'\,dt'\end{aligned}\right\} \tag{6.75}$$

6.2 Retardierte Potentiale

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \tfrac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' \\ \Phi(\vec{r},t) &= \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'\end{aligned}\right\} \tag{6.76}$$

2. Weg zur Gewinnung von G:
Fouriertransformation (benötigt etwas Funktionen-Theorie)

Ist die Lorentz-Bedingung erfüllt?

$$\begin{aligned}\nabla\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int\left(-\nabla'\frac{\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\vec{j}(\vec{r}',t')\,d^3r'\,dt' \\ &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int\frac{\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underbrace{\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}',t')}_{-\frac{\partial\rho}{\partial t'}(\vec{r}',t')}d^3r'\,dt' \\ &\quad \text{partielle Integration über } dt' \\ &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int\frac{\rho(\vec{r}',t')\frac{\partial}{\partial t'}\delta((t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'\,dt' \\ &= \kappa\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\Phi} \qquad \kappa^2\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}\end{aligned}$$

6.2.1 Liénard-Wiechert-Potentiale: Abstrahlung einer beliebig bewegten, punktförmigen Ladung

$$\left.\begin{aligned}\rho &= q\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t)) \\ \vec{j} &= q\vec{v}\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t))\end{aligned}\right\} \tag{6.77}$$

$$\overset{6.75}{\Longrightarrow} \qquad \vec{A} = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} q \int \frac{\vec{v}\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t))\delta(t-t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3r'\, dt'$$

$$= \frac{\kappa\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{\vec{v}\,\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\, dt'$$

$$\delta(f(t')) \qquad \text{mit} \qquad f(t') = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} - t$$

$$\delta(f(t')) = \frac{\delta(t' - t_0)}{\left.\frac{df}{dt'}\right|_{t_0}} \qquad f(t_0) = 0 \qquad \text{bestimmt } t_0$$

$$\frac{df}{dt'} = 1 - \frac{1}{c}\nabla|\vec{r} - \vec{r}_0|\frac{d\vec{r}_0}{dt'} = 1 - \frac{\vec{e}_{\vec{r}\vec{r}_0}}{c} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{A} = \frac{\kappa\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{\vec{v}\,\delta(t' - t_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|\left(1 - \frac{\vec{e}_{\vec{r}\vec{r}_0}\vec{v}}{c}\right)}\, dt'$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}_1, t) &= \tfrac{\kappa\mu_0 q}{4\pi}\left[\frac{\vec{v}}{\underbrace{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}_{r_{10}}(1 - \frac{v_{10}}{c})}\right]_{\text{ret}} \\ \Phi(\vec{r}_1, t) &= \tfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1 0 - \frac{\vec{r}_1 0 \cdot \vec{v}}{c}}\right]_{\text{ret}} \end{aligned}\right\} \tag{6.78}$$

$$t' = t - \frac{r_{10}}{c} \tag{6.79}$$

Liénard-Wiechert-Potential, z. B.

$$\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$r_{10}^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t'))^2$$

$$2r_{10}\frac{\partial r_{10}}{\partial t'} = 2\vec{r}_{10} \cdot \left(-\frac{d\vec{r}_0(t')}{dt'}\right)$$

$$\frac{\partial r_{10}}{\partial t'} = -\frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{v}_0(t')}{r_{10}} \tag{6.80}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\left(1 - \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{r}_{10}}{c r_{10}}\right) = 1$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{r}_{10}}{c r_{10}}} \tag{6.81}$$

$$\nabla r_{10} = \underbrace{\nabla}_{\text{„}\nabla_1\text{“}}((\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t')) = \frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}} + \frac{\partial r_{10}}{\partial t'}\nabla t'$$

$$\overset{6.79}{\Longrightarrow} \nabla t' = -\frac{\nabla r_{10}}{c}$$

$$\nabla r_{10} = \frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}_{10}}{r_{10}} - \left(\frac{\nabla r_{10}}{c}\right)$$

$$\nabla r_{10} = \frac{\vec{r}_{10}}{\vec{r}_{10} - \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{r}_{10}}{c}} \tag{6.82}$$

$$\nabla t' = -\frac{\vec{r}_{10}}{cr_{10} - \vec{v}_0 \cdot \vec{r}_{10}} \tag{6.83}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \underbrace{\frac{\left(c^2 - v_0^2\right)\left(\vec{r}_{10} - \frac{r_{10}}{c}\vec{v}_0\right)}{c^2\left(r_{10} - \frac{\vec{r}_{10}\cdot\vec{v}_0}{c}\right)^3}}_{\propto \frac{1}{r_{10}^2} \text{ für } r_{10}\to\infty} + \underbrace{\frac{\vec{r}_{10}\times\left[\left(\vec{r}_{10} - \frac{r_{10}}{c}\vec{v}_0\right)\times\dot{\vec{v}}_0\right]}{c^2\left(r_{10} - \frac{\vec{r}_{10}\cdot\vec{v}_0}{c}\right)^3}}_{\propto \frac{1}{r_{10}} \text{ für } r_{10}\to\infty} \right\} \quad \text{(a)} \\ \vec{B} &= \frac{1}{\kappa c}\frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}}\times\vec{E} \quad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{6.84}$$

$\vec{S} \propto \frac{1}{r^2}$ für $r \to \infty$: „Abstrahlung“
Nichtrelativistischer Grenzfall: $\frac{v}{c} \ll 1$ (in großer Entfernung)

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_{10}\times\left(\vec{e}_{10}\times\dot{\vec{v}}_0\right)}{c^2 r_{10}}$$

6.2.2 Der oszillierende Dipol

Elektrischer Dipol

Näherungen:

1. Dipol klein gegen Abstand zum Aufpunkt
2. Geschwindigkeit $v \ll c$
3. Periodische Schwingung
4. Abmessungen des Dipols a, $a \ll \lambda$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r_{10}}{c})}{r_{10}}\, d^3 r_0 \qquad r_{10} = |\vec{r} - \vec{r}_0| \\ &\approx \frac{\kappa\mu_0}{4\pi r}\int \vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c})\, d^3 r_0 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Dipolmoment

$$\vec{p} = \int \rho\vec{r}\, d^3 r$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \int \dot{\rho}\vec{r}\, d^3 r = \int (-\nabla\cdot\vec{j})\,\vec{r}\, d^3 r \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} -\underbrace{\int \nabla\cdot(\vec{j}\circ\vec{r})\, d^3 r}_{\oint = 0} + \int \vec{j}\cdot\underbrace{\nabla\circ\vec{r}}_{\mathbf{E}}\, d^3 r \\ &= \int \vec{j}\, d^3 r \end{aligned} \tag{6.86}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}(t - \tfrac{r}{c}) \tag{6.87a}$$

Φ aus Lorentz-Bedingung (5.12): $\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{\kappa c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\left[\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c}) + \frac{1}{r}\ddot{\vec{p}}(-\frac{1}{c})\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right] \\
&= -\frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{r^3} + \frac{\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}(t-\frac{r}{c})}{cr^2}\right] \\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \underbrace{\frac{\kappa^2 c^2\mu_0}{4\pi}}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\left[\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{r^3} + \frac{\vec{r}\cdot\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{cr^2}\right]
\end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}_{\text{ret}}}{r^3} + \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{cr^2}\right] \tag{6.87b}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \kappa\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}_{\text{ret}}}{r^3} + \frac{\vec{r}\vec{p}_{\text{ret}}\,(-3)\,\vec{r}}{r^5} + \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\vec{r}}{r}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{cr^2} + \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}_{\text{ret}}\,(-2)\,\vec{r}}{cr^4} + \frac{\vec{r}\ddot{\vec{r}}_{\text{ret}}}{cr^2}\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\vec{r}}{r}\right] \\
\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} &= \underbrace{\frac{\kappa\mu_0}{4\pi}}_{\frac{1}{\kappa 4\pi\varepsilon_0 c^2}}\frac{\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec{p}\,(t-\frac{r}{c})}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{cr^2} - \frac{3\vec{r}\cdot\vec{p}(t-\frac{r}{c})\vec{r}}{r^5}\right. \\
&\quad \left. - \frac{3\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\vec{r}}{cr^4} - \frac{\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\cdot\vec{r}\vec{r}}{c^2r^3} + \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})}{r}\right\}
\end{aligned} \tag{6.88}$$

$$\vec{p}^{\,*} := \vec{p}(t-\frac{r}{c}) + \frac{r}{c}\dot{\vec{r}}(t-\frac{r}{c}) \tag{6.89}$$

(Vergleiche Taylorreihe von $\vec{p}(t)$ in $t' = t - \frac{r}{c}$.)

$$\left.\begin{aligned}
\vec{E} &= -\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\tfrac{\vec{p}^{\,*}}{r^3} - \tfrac{3\vec{r}\cdot\vec{p}^{\,*}\,\vec{r}}{r^5} - \tfrac{\vec{r}\times\left(\vec{r}\times\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\right)}{c^2r^3}\right\} \qquad \text{(a)} \\
\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} = \nabla\times\tfrac{\kappa\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c}) \\
&= \tfrac{\kappa\mu_0}{4\pi}\left\{\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right)\times\dot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c}) + \tfrac{1}{r}\left(-\tfrac{1}{c}\nabla r\right)\times\ddot{\vec{p}}\right\} \\
\vec{B} &= \tfrac{\kappa\mu_0}{4\pi}\tfrac{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\times\vec{r} + \frac{1}{c}\ddot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})\times\vec{r}}{r^3} \qquad \text{(b)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.90}$$

$\vec{B}$ in Richtung $\vec{e}_\varphi$, $\vec{B}$-Linien kreisförmig, $\vec{E}$-Linien nierenförmig.

Nahzone	$r \ll \lambda$	elektro-statisch
Übergangsbereich		
Fernzone	$r \gg \lambda$	

$$\vec{S} = \frac{1}{\kappa\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\vec{p} = p_0\vec{e}_z\cos\omega t \tag{6.92}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\vec{B}_{\text{Fern}} & = & \frac{\kappa\mu_0}{4\pi c}\vec{e}_z\times\vec{e}_r\frac{\ddot{p}}{r} = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi c}\sin\vartheta\frac{\ddot{p}}{r}\vec{e}_\varphi \\ \vec{E}_{\text{Fern}} & = & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\sin\vartheta\frac{\ddot{p}}{r}\vec{e}_\vartheta\end{array}\right\} \tag{6.93}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\kappa\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \vec{e}_r\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\vartheta\frac{\left[\ddot{p}(t-\frac{r}{c})\right]^2}{r^2} \tag{6.94}$$

$$\oint\vec{S}\,d\vec{f} = \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\left[\ddot{p}(t-\frac{r}{c})\right]^2\underbrace{\int\sin^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi}_{\frac{4}{3}} = \frac{\kappa^2\mu_0\ddot{p}^2(t-\frac{r}{c})}{6\pi c} = -\frac{dW}{dt}$$

Mittelung über Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{array}{rcl}\ddot{p} & = & -p_0\omega\cos\omega t \\ \ddot{p}^2 & = & p_0^2\omega^4\cos^2\omega t \\ \bar{\ddot{p}^2} & = & \frac{1}{2}p_0^2\omega^4\end{array}$$

$$P_{\text{Strahlung}} = -\overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{\kappa^2\mu_0}{6\pi c}\frac{p_0\omega^4}{2} \tag{6.95}$$

$$\begin{array}{rcl}\dot{p} & = & -\omega p_0\sin\omega t = \int\vec{\jmath}dV = \int I(z)\,dz =: I\underbrace{\quad l\quad}_{\text{eff. Antennenlänge}} \\ & = & \underbrace{-I_0\sin\omega t}_{I(t)}\,l \\ \omega p_0 & = & I_0 l\ldots \\ P_{\text{Strahlung}} & = & \frac{\kappa^2\mu_0}{12\pi c}I_0^2\omega^2l^2 = \frac{\kappa^2\mu_0}{6\pi c}I_{\text{eff}}^2\omega^2l^2 = \frac{2\pi\kappa^2\mu_0 c}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_{\text{eff}}^2 \\ P_\Omega & = & RI_{\text{eff}}\end{array}$$

Daraus „Strahlungswiderstand“ für *kleine* Dipolantenne ($\frac{l}{\lambda} \ll 1$)

$$R_S = \underbrace{\frac{2\pi\kappa^2\mu_0 c}{3}}_{790\Omega}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tag{6.96}$$

Beispiel: Strahlungswiderstand einer Überlandleitung

Wechselstrom 50 Hz, $\lambda = 6000$ km, Leitung 600 km

$$R_S \approx 7,9\Omega$$

Leitung aus Kupfer, 2 cm ⌀, Cu: 1,7 $\mu\Omega$cm

$$R_\Omega = \frac{1,7 \cdot 10^{-6} \cdot 600 \cdot 10^3}{\pi}\Omega \approx 32\Omega$$

Beispiel: Strahlungswiderstand einer kleinen Rahmenantenne

Magnetisches Dipol

$$\vec{m} = \kappa I \vec{f}$$

Maxwellgleichungen für Volumen, $e = 0, \vec{j} = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{E} & \to & -\frac{\vec{B}}{\mu_0} \\ \vec{B} & \to & \varepsilon_0 \vec{E} \\ \varepsilon_0 & \leftrightarrow & \mu_0 \\ \vec{p} & \to & -\mu_0 \vec{m} \end{array}\right\} \tag{6.97}$$

$$\begin{aligned} \overset{6.95}{\Longrightarrow} P_{\mathrm{Str}} &= -\overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{\kappa^2 \mu_0}{6\pi c} \varepsilon_0 m_0^2 \frac{\omega^4}{2} \\ P_{\mathrm{Str}} &= \frac{\kappa^2 \mu_0 f^2 I_{\mathrm{eff}}^2 \omega^4}{6\pi c^3} \end{aligned}$$

$$R_S = \underbrace{\frac{(2\pi)^3 \mu_0 c}{3}}_{320\pi^4\Omega} \left(\frac{f}{\lambda^2}\right)^2 \kappa^2 \tag{6.98}$$

6.2.3 Beliebiger Multipol

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ \rho(\vec{r}, t) &= \underbrace{\rho(r)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}}_{\text{gemeint ist der Realteil}} \end{aligned}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{6.99}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \mathrm{e}^{-i\omega t} \underbrace{\frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')\, \mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}_{\vec{A}(\vec{r})}$$

Nahzone $d \ll r \ll \lambda$
Fenzone $r \gg \lambda$

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Fernzone: $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \vec{r}'\cdot\vec{n}$

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\kappa\mu_0\,\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r}\int \vec{\jmath}(\vec{r}')\,\mathrm{e}^{ik\vec{n}\cdot\vec{r}'}\,d^3r' \\ &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\int \vec{\jmath}(\vec{r}')\,(\vec{n}\cdot\vec{r}')^n\,d^3r' \qquad (6.101)\end{aligned}$$

n. Term:

$$\frac{1}{n!}\int \vec{\jmath}(\vec{r}')\,\underbrace{(k\vec{n}\cdot\vec{r}')^n}_{\ll 1}\,d^3r$$

Es sind nur die niedrigsten, nichtverschwindenden Terme von Bedeutung.
$n=0$:

$$\int \vec{\jmath}(\vec{r}')\,d^3r' = \dot{\vec{p}} = -i\omega\vec{p}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\frac{i\omega\vec{p}}{r}\,\mathrm{e}^{ikr} = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi r}\underbrace{\left(-i\omega\vec{p}\,\mathrm{e}^{ikr}\right)}_{\dot{\vec{p}}(t-\frac{r}{c})} \qquad (6.102)$$

Vergleiche (5.87a): Elektrisches Dipol
$n=1$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,(-ik)\int \vec{n}\cdot\underline{\vec{r}'\circ\vec{\jmath}(\vec{r})}\,d^3r'$$

$$\vec{r}'\circ\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\,(\vec{r}'\circ\vec{\jmath}+\vec{\jmath}\circ\vec{r}') + \frac{1}{2}\,(\vec{r}'\circ\vec{\jmath}-\vec{\jmath}\circ\vec{r}')$$

$$\frac{1}{2}\vec{n}\cdot(\vec{r}'\circ\vec{\jmath}-\vec{\jmath}\circ\vec{r}') = \frac{1}{2}\,(\vec{r}'\times\vec{\jmath})\times\vec{n}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\frac{k}{i}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\left\{\vec{n}\cdot\int\frac{1}{2}\,(\vec{r}'\circ\vec{\jmath}+\vec{\jmath}\circ\vec{r}')\,d^3r' + \underbrace{\frac{1}{2}\int(\vec{r}'\times\vec{\jmath})\,d^3r'}_{\frac{1}{\kappa}\vec{m}}\times\vec{n}\right\}$$

$$\begin{aligned}\int \vec{r}'\circ\vec{\jmath}\,d^3r' &= \int \vec{r}'\circ\vec{\jmath}\cdot\underbrace{\nabla'\circ\vec{r}'}_{E}\,d^3r' \\ &= \underbrace{\nabla'\cdot\vec{\jmath}\vec{r}'\circ\vec{r}'\,d^3r'}_{0} - \int\vec{\jmath}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}'\circ\vec{r}'\right)}_{E}\vec{r}'\,d^3r' \\ &\quad - \int\vec{r}'\circ\vec{r}'\nabla'\cdot\vec{\jmath}\,d^3r' \\ \frac{1}{2}\int(\vec{r}'\circ\vec{\jmath}+\vec{\jmath}\circ\vec{r}')\,d^3r' &= -\frac{1}{2}\int\vec{r}'\circ\vec{r}'\underbrace{\nabla'\vec{\jmath}}_{-\dot{\rho}}\,d^3r' \qquad \dot{\rho} = -i\omega\rho \\ &= \frac{i\omega}{2}\underbrace{\int\vec{r}'\circ\vec{r}'\rho\,d^3r'}_{Q\Longrightarrow(5.56)}\end{aligned}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi}\frac{k}{i}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\left\{\frac{i\omega}{2}\vec{n}\cdot Q + \frac{1}{2\kappa}\vec{m}\times\vec{n}\right\} \qquad (6.103)$$

Φ aus Lorentzbedingung ($\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2 \nabla \cdot \vec{A}$)

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{B} & = & ik\vec{n} \times \vec{A} \\ \vec{E} & = & \kappa c \vec{B} \times \vec{n} \end{array}\right\} \text{Fernzone !} \tag{6.104}$$

6.2.4 Quadrupolstrahlung

$$\vec{B} = -\frac{i\kappa\mu_0 k^3}{8\pi c} \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \vec{n} \times (\vec{n} \cdot Q) \tag{6.105}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 |\vec{S}|_{\text{mittel}} \tag{6.106}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{(8\pi)^2 c} \frac{k^6}{2} |\vec{n} \times (\vec{n} \cdot Q)\,|^2 \qquad k = \frac{\omega}{c} \tag{6.107}$$

Beispiel: Gestreckter Quadrupol

Kapitel 7

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

7.1 Ladungen in Materie

$$\rho(\vec{r}) \to \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \rho(\vec{r}')\, d^3r' = \rho^{\text{ave}}(\vec{r}) \tag{7.1}$$

oder: Glättungsfunktion $f(\vec{r}-\vec{r}')$

$$\int f(\vec{r}-\vec{r}')\, d^3r' = 1$$

$$f(\vec{r}-\vec{r}') = \left(\frac{\alpha}{\phi}\right)\, \mathrm{e}^{\alpha|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \tag{7.2}$$

$$\rho^{\text{ave}} = \int f(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')\, d^3r' \tag{7.3}$$

$$\vec{E}^{\text{ave}} = \int f(\vec{r}-\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}')\, d^3r' \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E}^{\text{ave}} &= \int \vec{E}(\vec{r}')\cdot\nabla f(\vec{r}-\vec{r}')\, d^3r \\
&= -\int \vec{E}(\vec{r}')\cdot\nabla' f(\vec{r}-\vec{r}')\, d^3r' \\
&= -\underbrace{\int \nabla'\cdot\left(\vec{E}(\vec{r}')f(\vec{r}-\vec{r}')\right)\, d^3r'}_{=\oint\ldots=0} + \int f(\vec{r}-\vec{r}')\underbrace{\nabla'\cdot\vec{E}(\vec{r}')}_{\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}}\, d^3r' \\
\nabla\cdot\vec{E}^{\text{ave}} &= \frac{\rho^{\text{ave}}}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$\rho_+^{\text{ave}} + \rho_-^{\text{ave}} = 0$ im unpolarisiertem Zustand

Polarisation

$$\vec{P} = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumeneinheit}} = \text{Dichte der Dipole} \cdot \text{mittleres Dipolmoment}$$

Verschiebung positiver gegen negative Ladungen: $\vec{d}(\vec{r})$

$$\vec{P} = \vec{d}\rho_+^{\text{ave}} \tag{7.6}$$

Überschußladungen

a) anschaulich

$$\begin{aligned} \Delta Q &= -\oint_{\partial(\Delta V)} \rho_+^{\text{ave}} \vec{d} \cdot d\vec{S} = -\oint_{\partial(\Delta V)} \vec{P} \cdot s\vec{S} \\ &= -\int_{\Delta V} \nabla \cdot \vec{P}\, dV = \int \rho^P\, dV \end{aligned}$$

$$\rho^P = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{7.7}$$

$$\sigma^P = \rho_+^{\text{ave}} \vec{d} \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n} \tag{7.8}$$

b) Dipol

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{7.9}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{7.10}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \underbrace{\int \nabla' \cdot \frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3r'}_{\oint \frac{\vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot d\vec{S} \quad \text{mit } d\vec{S} = \vec{n}\, dS} - \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')\, d^3r' \right\}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \oint \frac{\sigma\, dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int \frac{\rho\, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$$

Durch Vergleichen der Gleichungen lassen sich wieder Gleichung (7.7) und (7.8) ablesen.

7.1.1 Elektrostatik

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= = 0 \end{aligned}$$

$$\rho = \rho^{\text{ frei}} + \rho^{\text{ pol}} \tag{7.11}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho^{\text{ frei}} + \rho^{\text{ pol}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho^{\text{ frei}}}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho^{\text{ frei}}}{\varepsilon_0}$$

Dielektrische Verschiebung

Definition

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \text{(im SI-System)} \\ \vec{D} &= \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(im Gaußschen System mit } \varepsilon_0 = \tfrac{1}{4\pi}\text{)} \end{aligned} \tag{7.12}$$

Im folgenden nur noch im SI-System.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho^{\text{ frei}} \tag{7.13}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{7.14}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q^{\text{ frei}}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \qquad \text{(lineare Näherung)} \tag{7.15}$$

χ: Skalar oder Tensor

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \Big(1 + \underbrace{\chi}_{\text{Suszeptibilität}} \Big) \vec{E} = \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dielektrizitätskonstante}} \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7.16}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \vec{E}^{\text{ I}} \cdot \vec{n}\, dA - \int \vec{E}^{\text{ II}} \cdot \vec{n}\, dA = \int \frac{1}{\varepsilon_0} \int \sigma\, dA$$

$$\left(\vec{E}^{\text{ I}} - \vec{E}^{\text{ II}} \right) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \tfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho^{\text{ frei}} & \nabla \times \vec{D} &= 0 \end{aligned}$$

$$D_\perp^{\text{ I}} = D_\perp^{\text{ II}} \tag{7.18}$$

$$\varepsilon_1 E_\perp^{\text{ I}} = \varepsilon_2 E_\perp^{\text{ II}}$$

$$\vec{E}_t^{\text{ I}} = \vec{E}_t^{\text{ II}} \tag{7.19}$$

Beispiel: Plattenkondensator

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \approx \varepsilon_0 EA \\ C &:= \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \text{Kapazität im Vakuum} \\ V &\equiv U = -\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = Ed \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$C := \frac{Q^{\text{ frei}}}{U} = \frac{DA}{Ed} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{I}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r^0} - \frac{Q'}{r'}\right) \\ \Phi_{\text{II}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q''}{r''} \end{aligned}$$

Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} E_t: \quad \Phi_{\text{I}}(x=0) &= \Phi_{\text{II}}(x=0) \\ D_\perp: \quad \varepsilon_1 \left.\frac{\partial \Phi_{\text{I}}}{\partial x}\right|_{x=0} &= \varepsilon_2 \left.\frac{\partial \Phi_{\text{II}}}{\partial x}\right|_{x=0} \end{aligned}$$

$$\frac{Q}{\sqrt{\rho^2+a^2}} - \frac{Q'}{\sqrt{\rho^2+a'^2}} = \frac{Q''}{\sqrt{\rho^2+a''^2}} \qquad y^2+z^2 =: \rho^2$$

$a, a', a''; \frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}, \ldots$ linear unabhängig, wenn $a \neq a' \neq a'' \neq a$.

$$\Longrightarrow a = a' = a'' \qquad \underline{Q - Q' = Q''}$$

$$-\varepsilon_1 \frac{Q}{r^2} \underbrace{\vec{e}^0}_{\frac{\vec{r}^0}{r^0}} + \varepsilon_1 \frac{Q'}{r'^2}\vec{e}' = -\varepsilon_2 \frac{Q''}{r^2}\vec{e}^0$$

Grenzfall: $e'_x = -e^0_x$

$$-\frac{\varepsilon_1 Q}{\rho^2+a^2} - \frac{\varepsilon_1 Q'}{\rho^2+a^2} = -\frac{\varepsilon_2 Q''}{\rho^2+a^2}$$

$$\underline{\varepsilon_0 (Q+Q') = \varepsilon_2 Q''}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow Q'' &= \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} Q \\ Q' &= \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} Q \end{aligned}$$

7.2 Magnetismus in Materie

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{j} = \vec{j}^{\,\text{frei}} + \underbrace{\vec{j}^{\,\text{pol}}}_{\equiv \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} + \vec{j}^{\,\text{mag}} \tag{7.21}$$

$$\vec{M} = \underbrace{N}_{\frac{\text{Teilchen}}{\text{Volumen}}} \vec{m}_{\text{at}} = \frac{\vec{m}}{V} \tag{7.22}$$

Ladungserhaltung für $\rho^{\,\text{frei}}, \rho^{\,\text{pol}}, \nabla \cdot \vec{j}^{\,\text{mag}} = 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3 r' \\
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3 r' \qquad (7.23) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \Bigg[\underbrace{-\nabla' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{-\oint d\vec{S}' \times \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \Bigg] d^3 r'
\end{aligned}$$

$\oint d\vec{S}' \times \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$, falls keine Diskontinuität (Grenzfläche) auftritt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3 r + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dS' \tag{7.24}$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{j}^{\,\text{mag}} &= \nabla \times \vec{M} \\
\vec{J}^{\,\text{mag}} &= -\vec{n} \times \vec{M}
\end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
\rho^{\,\text{pol}} &= -\nabla \cdot \vec{P} \\
\sigma^{\,\text{pol}} &= \vec{n} \cdot \vec{P}
\end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}^{\,\text{frei}} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{M} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\vec{B} - \mu_0 \vec{M} \right) = \mu_0 \vec{j}^{\,\text{frei}} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{7.26}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \qquad \text{magnetische (Feld-) Erregung} \tag{7.27}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}^{\,\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho^{\text{frei}} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j}^{\text{frei}} + \tfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}' \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

7.2.1 Magnetostatik

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \qquad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 & \qquad \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} \\ \vec{D} &= \vec{E} + \vec{P} & \qquad \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{M}' \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{D} &\to \vec{B} \\ \vec{E} &\to \vec{H} \\ \vec{P} &\to \vec{M}' \end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

ρ^{pol}	$=$	$-\nabla \vec{P}$	magnetische Raumladung	$-\nabla \cdot \vec{M}'$
σ^{pol}	$=$	$\vec{n} \cdot \vec{P}$	magnetische Oberflächenladung	$\vec{n} \cdot \vec{M}'$
$\vec{E}$	$=$	$-\nabla \Phi$		$\vec{H} = -\nabla \Psi$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$U^{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{7.30}$$

Lineare Näherung für weiche Materialien nahe 0:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \tag{7.31}$$

$\mu \approx$ einige 10^3 für Ferromagnetika

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} {\vec{H}_\parallel}^{\text{I}} &= {\vec{H}_\parallel}^{\text{II}} \\ {B_\perp}^{\text{I}} &= {B_\perp}^{\text{II}} \end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{{B_\parallel}^{\text{I}}}{{B_\perp}^{\text{I}}}$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{{B_\parallel}^{\text{I}}}{{B_\perp}^{\text{I}}} \frac{{B_\perp}^{\text{II}}}{{B_\parallel}^{\text{II}}} = \frac{\mu_1 \mu_0 {H_\parallel}^{\text{I}}}{\mu_2 \mu_0 {H_\parallel}^{\text{II}}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{7.33}$$

$\mu_1 = 1$ für Vakuum oder Luft, $\mu_2 \gg 1$ für Ferromagnetika.

$$\tan \alpha_1 = \frac{\tan \alpha_2}{\mu_2} \approx 0$$

Feldlinien „fast“ senkrecht auf Ferromagneten.

Beispiel: Elektromagnet

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{f} \approx B_1 A - B_2 A = \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

$$B_1 = B_2$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H\, dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 = nI$$

1. Näherung: $B = \mu\mu_0 H$

$$nI = \frac{B}{\mu_0} l_1 + \frac{B}{\mu\mu_0} l_2$$

$$B = \frac{\mu_0 nI}{l_1 + \frac{l_2}{\mu}}$$

$$H_1 = \frac{nI}{l_1 + \frac{l_2}{\mu}} \qquad H_2 = \frac{nI}{\mu_1 l_1 + l_2}$$

2. Unter Verwendung der gemessenen Hysteresekurve

$$\begin{aligned} \mu_0 nI &= B_1 l_1 + \mu_0 H_2 l_2 \\ \mu_0 nI &= B_2 l_1 + \mu_0 H_2 l_2 \end{aligned}$$

Linearer Zusammenhang zwischen H_2, B_2

$$H_2 \qquad B_2 = B_1 \qquad H_1 = \frac{B_1}{\mu_0}$$

7.3 Ebene Wellen im Dielektrikum

Maxwell-Gleichungen in Materie

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Mit den Hilfsfeldern

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \mu\mu_0 \vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \end{aligned}\right\} \qquad \text{Näherungen}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\chi \to \chi(\omega) \qquad \mu \approx 1$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{v} - t\right)\omega\right]$$

$$\vec{k} = \frac{\omega\vec{n}}{v} \qquad |\vec{k}| = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0\,\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\\ \vec{B} &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{k} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}\end{aligned}$$

7.3.1 Brechung und Reflexion an Grenzflächen

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} && \text{Einfallende Welle}\\ \vec{E}' &= \vec{E}'_0\,\mathrm{e}^{i\left(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t\right)} && \text{Gebrochene Welle}\\ \vec{B}' &= \tfrac{\vec{k}'\times\vec{E}'}{\omega'}\\ k &= \tfrac{\omega}{v} = \tfrac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon} = k''\\ k' &= \tfrac{\omega}{v'} = \tfrac{\omega}{c}\sqrt{\mu'\varepsilon'}\end{aligned}$$

Randbedingungen für $z = 0$

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}'\cdot\vec{r}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}''\cdot\vec{r}\right)_{z=0}$$

$\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ liegen in einer Ebene.

$$k\sin\alpha_i = k'\sin\alpha_b = k''\sin\alpha_r \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_i = \alpha_r$$

$$\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_b} = \frac{k'}{k} = \frac{\sqrt{\mu'\varepsilon'}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{n'}{n} \qquad \text{Snellsches Brechungsgesetz} \tag{7.34}$$

Intensitätsverhältnisse

Normalkomponenten von $\vec{B}$ und $\vec{D}$ und Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stetig.

$$\begin{aligned}\perp\vec{D} &: \left[\varepsilon\left(\vec{E}_0 + \vec{E}''_0\right) - \varepsilon'\vec{E}'_0\right]\cdot\vec{n} = 0\\ \perp\vec{B} &: \left[\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}''_0 - \vec{k}'\times\vec{E}'_0\right]\cdot\vec{n} = 0\\ \parallel\vec{E} &: \left[\vec{E}_0 + \vec{E}''_0 - \vec{E}'_0\right]\times\vec{n} = 0\\ \parallel\vec{H} &: \left[\tfrac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}''_0\right) - \tfrac{1}{\mu'}\left(\vec{k}'\times\vec{E}'_0\right)\right]\times\vec{n} = 0\end{aligned}$$

1. $\vec{E} \perp$ Einfallsebene

$$\begin{aligned} \| E &: & E_0 + E_0'' - E_0' &= 0 \\ \| H &: & \sqrt{\tfrac{\varepsilon}{\mu}}\,(E_0 + E_0'')\cos\alpha_i - \sqrt{\tfrac{\varepsilon'}{\mu'}}E_0'\cos\alpha_b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2}{1 + \frac{\mu \tan\alpha_i}{\mu' \tan\alpha_b}} \overset{\mu=\mu'=1}{\approx} \frac{2\cos\alpha_i \sin\alpha_b}{\sin(\alpha_i + \alpha_b)} \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{1 - \frac{\mu \tan\alpha_i}{\mu' \alpha_b}}{1 + \frac{\mu \tan\alpha_i}{\mu' \alpha_b}} \approx -\frac{\sin(\alpha_i - \alpha_b)}{\sin(\alpha_i + \alpha_b)} \end{aligned}$$

Senkrechter Einfall

$$\frac{S''}{S} = \left(\frac{E_0''}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{n - n'}{n + n'}\right)^2$$

Für $\alpha_b < \alpha_i$ ergibt sich ein negatives Vorzeichen: „Phasensprung“ bei Reflexion am optisch dichteren Medium.

2. $\vec{E} \parallel$ Einfallsebene

$$\begin{aligned} \| E &: & \cos\alpha_i\,(E_0 + E_0'') - \cos\alpha_b E_0' &= 0 \\ \| H &: & \sqrt{\tfrac{\varepsilon}{\mu}}\,(E_0 + E_0'') - \sqrt{\tfrac{\varepsilon'}{\mu'}}E_0' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0} &= 2\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu'\varepsilon'}}\frac{\sin 2\alpha_i}{\sin 2\alpha_b + \frac{\mu}{\mu'}\sin 2\alpha_i} \approx \frac{2\cos\alpha_i \sin\alpha_b}{\sin(\alpha_i + \alpha_b)\cos(\alpha_i - \alpha_b)} \\ \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{\frac{\mu}{\mu'}\sin 2\alpha_i - \sin 2\alpha_b}{\frac{\mu}{\mu'}\sin 2\alpha_i + \sin 2\alpha_b} \approx \frac{\tan(\alpha_i - \alpha_b)}{\tan(\alpha_i + \alpha_b)} \\ &= 0 \qquad \text{für} \quad \alpha_i + \alpha_b = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Senkrechter Einfall

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n' + n}$$

Fresnellsche Formeln

Brechung

$$\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_b} = \frac{n'}{n}$$

Was passiert für $\sin\alpha_b = \frac{\sin\alpha_i n}{n'} > 1$?

$$\tan\alpha_b = \frac{\sin\alpha_b}{\underbrace{\sqrt{1 - \sin^2\alpha_b}}_{\text{imaginär}}} = \frac{\overbrace{k_\parallel'}^{=k_\perp,\ \text{reell}}}{\underbrace{k_\perp'}_{=\pm i\beta_\perp,\ \text{imaginär}}}$$

$$e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = e^{ik_\parallel x} e^{-\beta_\perp z} \qquad \text{Totalreflexion}$$

Genzfläche zu leitendem Medium

Betrachte kleine Frequenze mit $\vec{j} = \sigma\vec{E}; \sigma, \mu \approx 1$ und ε gegeben.

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} - \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \sigma\vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\mu_0\sigma\vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \nabla \times \vec{B}_0 + \frac{i\omega}{c^2}\left(\varepsilon\mu + \frac{i\mu_0\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\vec{E}_0 = 0$$

$$n^2 = \varepsilon\mu \quad \text{ersetzt durch} \quad \hat{n}^2 = \varepsilon\mu + \frac{i\mu_0\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$$

$$\hat{n} + i\kappa$$

$$n^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}}\right)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}} - \varepsilon\right)$$

$$R = \frac{S''}{S} = \left|\frac{n - n'}{n + n'}\right|^2$$

Für $n = 1$ (Vakuum, Luft)

$$n' = \hat{n}$$

$$R = \left|\frac{1 - n - i\kappa}{1 + n + i\kappa}\right|^2$$

Für $\kappa \gg 1$ folgt $R \to 1$.

Kapitel 8

Spezielle Relativitätstheorie

Maxwellgleichungen im Vakuum $\Longrightarrow$ Wellengleichungen

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

Galileo-Transformation

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& x - vt \\ y' &=& y \\ z' &=& z \end{array}\right\} \tag{8.0}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi'(x', y', z', t) &=& \Phi(x' + vt, y', z', t) \\ \Phi'(\vec{r}, t) &=& \Phi(\vec{r}', t) \end{array}$$

$$\vec{r}' = T\vec{r}$$

$$\nabla^2\Phi = \nabla'^2\Phi'$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial\Phi}{\partial t} &=& \dfrac{\partial\Phi'}{\partial t} + \dfrac{\partial\Phi'}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &=& \dfrac{\partial^2\Phi'}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial^2\Phi'}{\partial x'\partial t}v + \dfrac{\partial^2\Phi'}{\partial x'^2}v^2 \end{array}$$

$$\nabla'^2\Phi' - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi'}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x'\partial t} + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial x'^2}v^2\right) = 0$$

8.1 Krummlinige Koordinaten im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} x^\alpha &=& x^\alpha(u^k) \\ u^k &=& u^k(x^\beta) \end{array}$$

Ein-Eindeutigkeit und stetige Differenzierbarkeit wird vorausgesetzt.

Basisvektoren

$$\vec{b}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$$

Beliebiger Vektor $\vec{A} = A^i \vec{b}_i$ $\quad A^i$: kontravariante Vektorkomponente
Reziproke Basis $\{\vec{b}^k\}\perp$ auf Koordinatenflächen, so daß

$$\vec{b}^i \cdot \vec{b}_k = \delta^i_k \qquad \text{(Kronecker } \delta\text{)}$$

$$\begin{aligned} u^k &= \text{const} \qquad \vec{b}^k \parallel \nabla u^k \\ du^k &= d\vec{r} \cdot \nabla u^k \\ d\vec{r} &= du^k \vec{b}_k \qquad \text{(keine Summe)} \\ du^k &= du^k \underbrace{\vec{b}_k \cdot \nabla u^k}_{1} \end{aligned}$$

$$\vec{b}^k = \nabla u^k$$

$$\vec{A} = A_i \vec{b}^i \qquad A^i = \vec{A} \cdot \vec{b}^i \qquad A_i = \vec{A} \cdot \vec{b}_i$$

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \vec{b}_i \, du^i \\ ds^2 &= d\vec{s} \cdot d\vec{s} = \left(du^i \vec{b}_i\right) \cdot \left(du^k \vec{b}_k\right) = du^i \, du^k \, g_{ik} \end{aligned}$$

$$g_{ik} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_k \qquad g^{ik} = \vec{b}^i \cdot \vec{b}^k$$

$$A^2 = A^i A^k g_{ik} = A_i A_k g^{ik} = A^i A_k \underbrace{\vec{b}^i \cdot \vec{b}_k}_{\delta^i_k} = A^i A_i$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i$$

$$A^i = g^{ik} A_k \qquad A_i = g_{ik} A^k$$

$$A^i C_i = \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{b}^i \vec{b}_i}_{\mathbf{E}} \cdot \vec{C} = \vec{A}\vec{C}$$

$$\underline{g^{ik} g_{kl}} = \vec{b}^i \cdot \underbrace{\vec{b}^k \circ \vec{b}_k}_{\mathbf{E}} \cdot \vec{b}_l = \vec{b}^i \vec{b}_l = \delta^i_l$$

g^{ik} und g_{ik} sind zueinander invers.

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= A^i \vec{b}_i = A'^k \vec{b}'_k \\
\vec{b}_i &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u'^k}\frac{\partial u'^k}{\partial u^i} \qquad \text{(Kettenregel)} \\
\vec{b}_i &= \vec{b}'_k \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} \\
A'^k &= A^i \frac{\partial u'^k}{\partial u_i} \qquad \text{„kotravariant“} \\
\vec{b}^k &= \nabla u^k = \nabla u^k(u'^k) = \frac{\partial u^k}{\partial u'^l}\nabla u'^l = \frac{\partial u^k}{\partial u'^l}\vec{b}'^l \\
\vec{b}'^k &= \vec{b}^l \frac{\partial u'^k}{\partial u^l} \\
A'_k &= A_l \frac{\partial u^l}{\partial u'^k} \qquad \text{„kovariant“}
\end{aligned}
$$

$$\Phi(u^i) \qquad \phi(u^i(u'^k)) = \Phi'(u'^k)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial u'^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \qquad \text{transformiert wie kovariante Vektorkomponente}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^i} = \Phi_i = \partial_i \Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} =: \partial_i \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} =: \partial^k$$

8.2 Lorentz-Transformation

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \,\mathrm{ms}^{-1} \qquad \text{(exakt)} \tag{8.1}$$

„Weltlinie“ $\vec{x}(t), t$

$$
\begin{aligned}
&\text{Bezugssystem } \Sigma \quad \vec{x}_A, t_A \\
&(\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 - c^2 (t_B - t_A)^2 = 0 \\
&\text{Bezugssystem } \Sigma' \quad \vec{x}'_A, t'_A \\
&(\vec{x}'_B - \vec{x}'_A)^2 - c^2 (t'_B - t'_A)^2 = 0
\end{aligned} \tag{8.2}
$$

Die Zeit muß auch transformiert werden!

$$
\left.
\begin{array}{llllllll}
\text{Translation} & t' & = & t+s & \vec{x}' & = & \vec{x}+\vec{a} & \text{(a)} \\
\text{Rotation} & t' & = & t & \vec{x}' & = & \underline{D}\vec{x} & \text{(b)}
\end{array}
\right\} \tag{8.3}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\vec{x}' &= \underline{D}\vec{x} + \vec{\omega} t + \vec{a} \\
t' &= t + s
\end{aligned}
\right\} \quad \text{Galileo-Transformation} \tag{8.4}
$$

Notation

$$\begin{aligned} x^0 &:= ct \\ \left(x^1, x^2, x^3\right) &:= \vec{x} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(x_B^o - x_A^0\right)^2 - \left(\vec{x}_B - \vec{x}_A\right)^2}_{=0 \text{ wenn B und A durch Lichtblitz verbunden sind}} \tag{8.6}$$

$$x^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_i \left(x^i\right)^2 = \sum_{i,k} x^i \underline{\delta}_{ik} x^k$$

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \left(x_B^\mu - x_A^\mu\right) g_{\mu\nu} \left(x_B^\nu - x_A \nu\right)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \tag{8.7}$$

$$x^\mu := \left\{x^0 = ct, \vec{x}\right\}$$

$$x_\mu = \delta_{\mu\nu} x^\nu \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= x^0 \qquad \mu = 0 \ldots 3 \\ x_i &= -x^i \qquad i = 1 \ldots 3 \end{aligned}$$

$$\text{Skalarprodukt } A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha = A^\alpha g_{\alpha\beta} B^\beta = A_\alpha g^{\alpha\beta} B_\beta \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} & > && x\text{: zeitartiger Vierervektor} \\ x^\mu x_\mu \; & = \; 0 && x\text{: „lichtartiger“ Vierervektor} \\ & < && x\text{: raumartiger Vierervektor} \end{aligned}$$

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = g_\alpha^\gamma \equiv \delta_\alpha^\gamma$$

Transformation (linear): $x^\mu \to x'^\mu$

$$x'^\mu = \Lambda_\sigma^\mu x^\sigma + a^\mu \tag{8.11}$$

$$\left(x_A^\mu - x_B^\mu\right) g_{\mu\nu} \left(x_A^\nu - x_B^\nu\right) = 0 = \left(x'^\lambda_A - x'^\lambda_B\right) g_{\lambda\sigma} \left(x'^\sigma_A - x'^\sigma_B\right)$$

$$\Longrightarrow \Lambda_\mu^\lambda g_{\lambda\sigma} \Lambda_\nu^\sigma = \alpha(\Lambda) g_{\mu\nu} \tag{8.12}$$

Norm reell, daher auch α reell; Vorzeichen der Norm erhalten, daher $\alpha(\Lambda) > 0$.
Für reine Drehungen ist $\alpha = 1$.

$$\alpha^2 = 1$$

Transformation $v_x > 0$, Drehung
Skalarprodukt: $x^\mu y_\mu = x'^\mu y'_\mu$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Galilei-Transformation:

$$\begin{array}{rclcrcl} t' &=& t & & x' &=& x - vt \\ y' &=& y & & z' &=& z \end{array}$$

Wähle nun:

$$\begin{array}{rcll} t' &=& At + Bx & \text{(a)} \\ x' &=& Ct + Dx & \text{(b)} \\ y' &=& y & \\ z' &=& z & \end{array}$$

t' ist unabhängig von y und z, weil der Koordinatenursprung in y-z-Ebene willkürlich gewählt werden kann.

Für $x = vt$ ist $x' = 0$:

$$\text{(b)} \qquad C = -Dv \qquad \text{(c)}$$

Für $x' = -vt'$ ist $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{rcl} t' &=& -At \\ -vt' &=& Ct \end{array}\right\} -v = \frac{C}{A} \quad \Longrightarrow \quad C = -Av \qquad A = D \qquad \text{(d)}$$

Aus $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$ folgt:

$$C^2t^2 + D^2x^2 + 2CDtx - c^2A^2t^2 - c^2B^2x^2 - 2c^2ABtx = x^2 - c^2t^2$$

Koeffizientenvergleich für alle x und t:

$$\begin{array}{rrcll} t^2: & C^2 - c^2A^2 &=& -c^2 & \text{(e)} \\ xt: & CD - c^2AB &=& 0 & \text{(g)} \\ x^2: & D^2 - c^2B^2 &=& 1 & \text{(f)} \end{array}$$

$$\text{(g)} \qquad C = Bc^2 \qquad A^2 = D^2 = 1 + c^2B^2 = 1 + \frac{C^2}{c^2} + 1 + \frac{A^2v^2}{c^2}$$

$$A^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \qquad A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} t' &=& \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t - \frac{vx}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &=& -\frac{vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{array}\right\} \qquad \text{Lorentz-Transformation} \qquad (8.14)$$

$$\beta := \frac{v}{c} \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x'^0 &=& \gamma x^0 - \beta\gamma x^1 \\ x'^1 &=& -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1 \\ x'^2 &=& x^2 \\ x'^3 &=& x^3 \end{array}\right\} \tag{8.14'}$$

$$\begin{aligned} x'\mu &= \Lambda^\mu_\nu(v\vec{e}_1)x^\nu \\ x' &= \underline{\Lambda}(v\vec{e}_1)x \end{aligned}$$

$$\underline{\Lambda} = (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.14"}$$

Rücktransformation: $v \to -v$

$$\underline{\Lambda}^{-1} = \left\{ \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu_\nu \right\} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{8.12}{\Longrightarrow} \Lambda^\lambda_\mu g_{\lambda\sigma}\Lambda^\sigma_\nu = g_{\mu\nu} \tag{8.15}$$

8.2.1 Längenkontraktion

Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt zur gleichen Zeit messen.

$$\begin{aligned} l' &= x'^1_e - x'^1_a = \gamma\left(x^1_e - x^1_a\right) = \gamma l \\ l &= \frac{l'}{\gamma} = l'\sqrt{1-\beta^2} < l' \end{aligned} \tag{8.16}$$

8.2.2 Zeitdiletation

Σ, Σ' Uhr am Ort x'^1.

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma x'^0 + \beta\gamma x'^1 \\ x^1 &= \beta\gamma x'^0 + \gamma x'^1 \\ x^0_b - x^0_a &= \gamma\left(x'^0_b - x'^0_a\right) \\ \Delta t' \qquad & \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} < \Delta t \end{aligned} \tag{8.17}$$

8.2.3 Minkowski-Diagramm

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad c = 1 \\ t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned}$$

Suche geometrischen Ort aller Punkte mit $t' = 0$ und $x' = 1$:

$$\begin{aligned} & & 0 &= \gamma t - v\gamma x \\ &\Longrightarrow & t &= vx \\ & & 1 &= -v\gamma t + \gamma x \\ &\Longrightarrow & \sqrt{1 - v^2} &= -vt + x \\ & & \sqrt{1 - v^2} &= -v^2 x + x = \left(1 - v^2\right) x \\ & & 1 &= \sqrt{1 - v^2}\, x \\ & & 1 &= \left(1 - v^2\right) x^2 \\ & & 1 &= x^2 - t^2 \end{aligned}$$

Ebenso für $x' = 0$ und $t' = 1$.
Relativität der Gleichzeitigkeit, Längenkontraktion, Zwillingsparadoxon

8.2.4 Hintereinanderausführen von 2 Lorentztransformationen

Zwei Lorentztransformationen mit v_1, v_2 ergeben wieder eine Lorentztransformation mit

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} \tag{8.18}$$

Zum Vergleich: Galileotransformation

$$v = v_1 + v_2 \qquad \text{Addition von Geschwindigkeiten}$$

Vergleiche Lorentztransformation mit Rotation in der Ebene.

		Lorentztransformation			Rotation
t'	$=$	$\frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}$	x'	$=$	$x\cos\varphi + y\sin\varphi$
x'	$=$	$\frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$	y'	$=$	$-x\sin\varphi + y\cos\varphi$
v	$:=$	$\tanh\psi$	u	$:=$	$\tan\varphi$
x'	$=$	$\frac{x - \tanh(\psi)\, t}{\sqrt{1 - \tanh^2\psi}}$	x'	$=$	$\frac{x + yu}{\sqrt{1+u^2}}$
t'	$=$	$\frac{-\tanh(\psi)\, x + t}{\sqrt{1 - \tanh^2\psi}}$	y'	$=$	$\frac{-x\,u + y}{\sqrt{1+u^2}}$

$$\left.\begin{aligned} t' &= -x\sinh\psi + t\cosh\psi \\ x' &= x\cosh\psi - t\sinh\psi \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

Hintereinanderausführen von 2 Transformationen

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cosh\psi_1 & -\sinh\psi_1 \\ -\sinh\psi_1 & \cosh\psi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\psi_2 & -\sinh\psi_2 \\ -\sinh\psi_2 & \cosh\psi_2 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \cosh\psi_2\cosh\psi_1 + \sinh\psi_2\sinh\psi_1 & -\cosh\psi_2\sinh\psi_1 - \sinh\psi_2\cosh\psi_1 \\ -\sinh\psi_2\cosh\psi_1 - \cosh\psi_2 - \sinh\psi_1 & \sinh\psi_2\sinh\psi_1 + \cosh\psi_2\cosh\psi_1 \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \cosh(\psi_1+\psi_2) & -\sinh(\psi_1+\psi_2) \\ -\sinh(\psi_1+\psi_2) & \cosh(\psi_1+\psi_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Beim Hintereinanderausfürhen von (gleichgerichteten) Lorentztransformationen addieren sich die Rapiditäten ψ.

8.2.5 Vierervektoren

$$
\begin{aligned}
\text{Rotationsinvarianz} &\Longrightarrow \text{Vektornotation} \\
\text{Lorentz-Invarianz} &\Longrightarrow \text{Vierervektoren}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Vierervektor} & x^\mu & = & \{ct, x, y, z\} \\
 & dx & = & \{dt, d\vec{r}\} = dx \qquad \text{mit } c = 1 \\
\text{Skalarprodukt} & x \cdot y & = & x^\mu y_\mu \\
\text{Viererskalar} & ds^2 & = & dx^\mu dx_\mu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\
\text{Bahnkurve} & dx & = & v_x\, dt \\
 & ds^2 & = & dt^2\left(1 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right) = dt^2\left(1 - v^2\right)
\end{array}
$$

$$
\text{wenn } v = 0 \qquad ds = dt \qquad ds\text{: Eigenzeit} \tag{8.20}
$$

Vierer-(Welt-)Skalar: ds

Geschwindigkeit

V_i: Teilchengeschwindigkeit; v: Geschwindigkeit der Lorentztransformation

$$
\begin{array}{lclclclcl}
V_x & = & \frac{dx}{dt} & \qquad V_y & = & \frac{dy}{dt} & \qquad V_z & = & \frac{dz}{dt} \\
V_x' & = & \frac{dx'}{dt'} & \qquad V_y' & = & \frac{dy'}{dt'} & \qquad V_z' & = & \frac{dz'}{dt'}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lclclcl}
dx' & = & \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(V_x - v)\,dt}{\sqrt{1-v^2}} & \qquad & dy' & = & dy \\
dt' & = & \frac{dt - v\,dx}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(1 - vV_x)\,dt}{\sqrt{1-v^2}} & \qquad & dz' & = & dz
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
\frac{dx'}{dt'} & = & \frac{V_x - v}{1 - vV_x} \\
\frac{dy'}{dt'} & = & \frac{V_y\sqrt{1-v^2}}{1 - vV_x} \\
\frac{dz'}{dt'} & = & \frac{V_z\sqrt{1-v^2}}{1 - vV_x}
\end{array}
\right\} \text{nicht räumlich Komponente eines Vierervektors} \tag{8.21}
$$

Statt durch dt durch ds dividieren.

Vierergeschwindigkeit u

$$\left.\begin{array}{llll} u^0 = \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{1-V^2}} & & u^2 = \frac{dy}{ds} = \frac{V_y}{\sqrt{1-V^2}} \\ u^1 = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{V_x}{\sqrt{1-V^2}} & & u^3 = \frac{dz}{ds} = \frac{V_z}{\sqrt{1-V^2}} \end{array}\right\} \tag{8.22}$$

$$u^\nu u_\nu = 1 \tag{8.23}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{Impuls}$$

$$p^\nu = mu^\nu \qquad \text{„Viererimpuls“} \tag{8.24}$$

Bedeutung von p^0?

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \overset{v \ll c}{\approx} mc\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \ldots\right) = \frac{1}{c}\Bigg(\underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \frac{mV^2}{2} + \ldots\Bigg)$$

$$p^0 = \frac{E}{c}$$

Newtonsche Mechanik:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{richtig für} \qquad \vec{p} \to p^n$$

$$K^\nu = \frac{dp^\nu}{ds} \tag{8.27}$$

$$p^\nu = mu^\nu \qquad ds = dt\sqrt{1-v^2}$$

$$K^i = \frac{F^i}{\sqrt{1-v^2}} \qquad \text{Minkowski-Kraft} \tag{8.28}$$

$$p^0 = \frac{E}{c}$$

$$K^0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dE}{dt} \tag{8.29}$$

Die nullte Komponente ist „überzählig“.

$$F^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

Addition von Geschwindigkeiten

Bezugssytem Σ' mit $-V_1$ in x-Richtung, Massenpunkt mit V_2 in x-Richtung.

$$V_2 = \frac{dx}{dt}$$

$$V' = V_1 + V_2 \qquad \text{(Galileotransformation)}$$

$$x' = \frac{x + V_1 t}{\sqrt{1 - \frac{V_1^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t + \frac{V_1 x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V_1^2}{c^2}}}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx + V_1\, dt}{dt + V_1 \frac{dx}{c^2}} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \qquad \text{Vergleiche (8.18)}$$

8.2.6 Boost: Lorentz-Transformation ohne Drehung

Boost in x-Richtung:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Boost in y-Richtung:

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\beta_2\gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \Lambda_1\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\beta_1\gamma_1 & -\beta_2\gamma_1\gamma_2 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1\gamma_2 & \gamma_1 & \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hintereinanderausführen von nicht parallelen Boosts ergibt Bost und räumliche Drehung!

Boost in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors $\vec{n}$ im $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} x'^0 m &=& \gamma\left(x^0 - \beta\vec{n}\cdot\vec{x}\right) & & & \\ \vec{x}'_\parallel &=& \gamma\left(\vec{x}_\parallel - \beta\vec{n}x^0\right) & \vec{x}_\parallel &=& \vec{x}\cdot\vec{n}\vec{n} \\ \vec{x}'_\perp &=& \vec{x}_\perp & \vec{x}_\perp &=& \vec{x} - \vec{x}_\parallel = (\mathbf{E} - \vec{n}\circ\vec{n}) \end{array}\right\} \qquad (8.30)$$

n: $n^0 = 0$, $n^\mu n_\mu = 1$

$$\begin{aligned} x_\parallel &= -x^\mu n_\mu n \\ x_\perp &= x - x_\parallel \\ x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu \end{aligned}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma n^n \\ -\beta\gamma n^m & (\gamma-1)\, n^m n^n - \delta^m_n \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

Jede eigentliche, orthochrone Lorentztransformation läßt sich eindeutig als Produkt $\Lambda = B(\Lambda)\tilde{R}(\Lambda)$ schreiben.

Carton-Zerlegung

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$ (keine Zeitumkehr, keine Raumspiegelung)

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\Lambda = \Lambda e_0$$

$$\left(x^0_\Lambda\right)^2 - \left(\vec{x}_\Lambda\right)^2 = 1$$

$$x^0_\Lambda = \cosh\vartheta \qquad |\vec{x}_\Lambda| = -\sinh\vartheta$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_\Lambda}{|\vec{x}_\Lambda|}$$

$$\Lambda\left(\vec{n}, -\vartheta\right) \begin{pmatrix} x^0_\Lambda \\ \vec{x}_\Lambda \end{pmatrix} = e_0$$

$\Lambda\left(\vec{n}, -\vartheta\right)\Lambda$ ist eine reine Rotation!

$$\begin{aligned} B(\Lambda) &= \Lambda\left(\vec{n}, \vartheta\right) \\ \tilde{R}(\Lambda) &= \Lambda\left(\vec{n}, -\vartheta\right)\Lambda \end{aligned}$$

8.2.7 Allgemeine Lorentztransformation

Lineare, homogene Transformation, die den Betrag des Linienelementes ungeändert läßt.

$$A'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} A^{\mu} \qquad A'_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A_{\mu}$$

$$A'_{\nu} A'^{\nu} \stackrel{!}{=} A_{\mu} A^{\mu}$$

$$\Lambda^{\nu}_{\mu}\Lambda^{\lambda}_{\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu} \qquad A^{\mu}_{\nu} A^{\nu}_{\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} \tag{8.32}$$

$$\tilde{\Lambda}\Lambda = \Lambda\tilde{\Lambda} = \mathbf{E}$$

Gruppe

8.2.8 Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = p_x \quad \text{etc.} = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \underbrace{V}_{=\,0,\ \text{freie Teilchen}}$$

Weltlinie durch Parameter λ beschränkt

$$t = t(\lambda) \qquad x^i = x^i(\lambda)$$

$$L_t = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$-mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt = -mc^2 \int ds$$

$$L_S = -mc^2 \qquad S \to \lambda$$

$$S = -mc^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\, \frac{ds}{d\lambda}$$

$$L_\lambda = -mc^2 \frac{ds(\lambda)}{d\lambda} = -mc^2 \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} =: \dot{x}^2$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0$$

$$p_\mu = mc^2 \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = mc^2 \frac{\frac{dx_\mu}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2}} = mc^2 \frac{dx_\mu}{ds}$$

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$$

$$\underbrace{\lambda}_{\text{Noether-Theorem}} \qquad \frac{dx}{d\lambda} = \dot{x} \qquad f(\dot{x}^2)$$

$L(q^i, \dot{q}^i)$ invarient

$$q^i \to h^i(s, q^l)$$

Für $s = 0$:

$$h^i(s = 0, q^l) = q^i$$

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{ds} h^j(s, q^l) \Big|_{s=0}$$

$$\lambda'(\lambda) = \lambda + \delta\lambda(\lambda)$$

$$x^\mu(\lambda') = x^\mu(\lambda) = x'^\mu + \frac{dx'^\mu}{d\lambda}(-\delta\lambda) + \mathcal{O}\left((\delta\lambda)^2\right)$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu \propto L$$

$$L = -mc^2\sqrt{\dot{x}^2}$$

$$u^\mu u_\mu = L$$

$$L^{\text{ frei}} = -\frac{1}{2}mu^\lambda u_\lambda$$

$$\begin{aligned} p_\mu &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u^\nu} - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = 0 \\ \dot{p}_\mu &= 0 \end{aligned}$$

Nichtrelativistischer Grenzfall

$$L = T - q\Phi + q\vec{A}_0 \cdot \vec{v} \tag{8.33}$$

$$U = q\left(\Phi - \vec{A}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\left\{\frac{\Phi}{c}, \vec{A}\right\} =: A^\nu \qquad \text{Vierervektor}$$

$$L = -\frac{1}{2}mu^\lambda u_\lambda - qA_\lambda u^\lambda \tag{8.34}$$

Lagrange-Gleichung in Vierernotation:

$$\frac{d}{ds}\left(mu_\nu + qA_\nu\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}qu^\lambda A_\lambda = 0$$

8.2.9 Vierertensoren

$$\begin{aligned} H'^{\kappa\lambda} &= \Lambda^\kappa_\mu \Lambda^\lambda_\nu H^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^\kappa_\mu H^{\mu\nu}\left(\tilde{\Lambda}\right)^\lambda_\nu \qquad \tilde{A} = A^T \end{aligned}$$

$$Q = \int_V \rho dV \qquad \text{soll invariant sein}$$

$$\rho\Delta V = \rho'\Delta V'$$

$$\Delta V = \Delta V'\sqrt{1-v^2} \qquad \text{mit c} = 1$$

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\rho' = \frac{\rho\left(1-v^2\right)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\rho - vj_x}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\vec{j}' = 0$$

$$\vec{j} = \rho v \vec{e}_x$$

$$j_x = \frac{\rho' v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\{c\rho, \vec{j}\} =: j^\mu$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \qquad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \kappa \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box = \partial_\mu \partial^\mu$$

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \kappa \mu_0 j^\nu \qquad \text{wobei } A^0 = \tfrac{\Phi}{c}$$

Lorentzbedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Was gilt für $\vec{E}, \vec{B}$?

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\partial \vec{A} t - \nabla \Phi \end{aligned}$$

Feldstärketensor

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A\mu \qquad \text{Definition} \\ F^{\mu\nu} &= g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} F_{\kappa\lambda} \qquad \text{Feldstärketensor} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = -F_{23} = F_{32} \\ \frac{E_x}{c} &= -\frac{\partial}{\partial (ct)} A_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Phi}{c} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^0} A^1 = -\frac{\partial}{\partial x^1} A^0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} A_1 - \frac{\partial}{\partial x^1} A_0 = -F_{10} = F_{01} \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(SI-System)}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

8.2.10 Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(a)} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(b)} \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{\jmath} && \text{(c)} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 && \text{(d)} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{(d)}}{\Longrightarrow} \qquad B_x = -F_{yz} \text{ usw.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F_{yz} + \frac{\partial}{\partial y}F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial z}F_{xy} = 0$$

$$\overset{\text{(c)}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}F_{30} + \frac{\partial}{\partial x^3}F_{02} + \frac{\partial}{\partial x^0}F_{23} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa}F_{\lambda\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda}F_{\mu\kappa} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}F_{\kappa\lambda} = 0 \qquad (8.35)$$

4 Gleichungen, homogene Maxwell-Gleichung (c) und (d) in Vierernotation.

$$\begin{aligned} \overset{\text{(b)}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{\partial}{\partial x^\nu}F^{\nu 0} = \frac{c\rho}{\varepsilon_0 c^2} &= \kappa\mu_0 \jmath^0 \\ \overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow} \left(\nabla \times \vec{B}\right)_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} &= \kappa\mu_0 \jmath_x \\ \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} &= \kappa\mu_0 \jmath^1 \\ \partial_\nu F^{\nu i} &= \kappa\mu_0 \jmath^i \end{aligned}$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \kappa\mu_0 \jmath^\mu \qquad (8.36)$$

4 Gleichungen, inhomogene Maxwell-Gleichung (a) und (b) in Vierernotation.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{p} = m\vec{u} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{ds} \qquad K^0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{ds} \qquad ds = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\vec{K} = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\vec{E} + \kappa\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)^i &= v^jB^k - v^kB^j = -v^jF^{ij} - v^k\left(-F^{ki}\right)\\ &= v^kF^{ki} + v^jF^{ji} + \underbrace{v^iF^{ii}}_{0}\\ &= -v_kF^{ki} = v_kF^{ik}\end{aligned}$$

i, j, k: Zyklische Permutation von 1, 2, 3.

$$\begin{aligned}E^i &= F^{i0}c\\ K^i &= \kappa q u_\nu F^{i\nu}\\ K^0 &= \kappa q u_\nu F^{0\nu} = q\frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}F^{0i}\\ &= \frac{q}{c}\frac{\vec{v}\vec{E}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c}\frac{dE}{ds}\end{aligned}$$

Lorentzkraft

$$K^\mu = \kappa q u_\nu F^{\mu\nu} \qquad \text{Lorentzkraft} \tag{8.37}$$

Beispiel: Ebene Welle

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{i\Phi}\\ \vec{B} &= \vec{B}_0\,\mathrm{e}^{i\Phi}\\ \Phi &= \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\\ \vec{k} &= k\vec{n} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}\end{aligned}$$

Phase: Vierervektor

$$\begin{aligned}\Phi &= k_\mu x^\mu\\ k^\mu &= \left(\frac{\omega}{c},\vec{k}\right) = \left(\frac{\omega}{c},\frac{\omega}{c}\vec{n}\right)\end{aligned}$$

Beispiel: Dopplereffekt

Bewegtes Bezugssystem Σ', Quelle bewegt sich in x-Richtung. Frequenz im Ruhesystem des Strahlers ω_0.

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega\tfrac{1-\beta n_x}{sqrt1-\beta^2} \qquad & \omega' n'_y &= \omega n_y\\ \omega' n'_x &= \omega\tfrac{n_x-\beta}{sqrt1-\beta^2} \qquad & \omega' n'_z &= \omega n_z\end{aligned}$$

$$n_x = \cos\sphericalangle(\text{Beobachtungsrichtung, Bewegungsrichtung})$$

1. Bewegung direkt auf den Beobachter zu oder von ihm weg:

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1\mp\beta} = \omega_0\sqrt{\frac{1\pm\beta}{1\mp\beta}} \approx \omega_0\left(1\pm\beta\right)$$

2. Bewegungsrichtung senkrecht zur Beobachtungsrichtung: $n_x = 0$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad \text{„transversaler Dopplereffekt“}$$

Beispiel: Aberration (z.B. Licht von Fixstern)

$$\begin{aligned} \vec{n}' &= (0,1,0) \\ n_x &= \beta \\ n_y &= \frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}$$

Beispiel: Reflexion an bewegtem Spiegel

$$\vec{n} = (\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0, 0) \qquad \omega_0$$

Zweinmal Lorentztransformation, im bewegten System gewöhnlich Reflexion.

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega_0\tfrac{1-\beta n_x}{\sqrt{1-\beta^2}} & \omega' n'_x &= \omega_0\tfrac{n_x-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \omega' n'_y &= \omega_0 n_y & \omega' n'_z &= \omega_0 n_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega_0\frac{1-\beta n_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_0\frac{1-\beta\cos\vartheta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ n'_x &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,(n_x-\beta)}{(1-\beta\cos\vartheta_0)\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{n_x-\beta}{1-\beta\cos\vartheta_0} \\ n'_y &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\vartheta_0}\sin\vartheta_0 \end{aligned}$$

Reflexion

$$\begin{aligned} \omega'_R &= \omega' = \omega_0\frac{1-\beta\cos\vartheta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ n'_{Rx} &= -n'_x = \frac{\beta-\cos\vartheta_0}{1-\beta\cos\vartheta_0} \\ n'_{Ry} &= n'_y \end{aligned}$$

Rücktransformation

$$\begin{aligned} \omega_R &= \omega'\frac{1+\beta n'_{Rx}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \ldots = \omega_0\frac{1-2\beta\cos\vartheta_0+\beta^2}{1-\beta^2} \approx \omega_0\,(1-2\beta\cos\vartheta_0) \\ n_{Rx} &= \cos\vartheta_R = \frac{\omega'_R}{\omega_R}\frac{n'_{Rx}+\beta}{sqrt1-\beta^2} = \ldots = -\frac{\cos\vartheta_0+2\beta-\beta^2\cos\vartheta_0}{1-2\beta\cos\vartheta_0+\beta^2} = \ldots \end{aligned}$$

Kraftdichte

$$\vec{f} = \rho\big(\vec{E} + \underbrace{\kappa}_{\text{SI}}\vec{v}\times\vec{B}\big)$$

$$
\begin{aligned}
f^i &= \jmath^0 F_{0i} + \jmath^k F_{ki} = \jmath^\mu F_{\mu i} = -\jmath_\mu F^{\mu i} = \jmath_\mu F^{i\mu} \\
f^0 &= \jmath_\mu F^{0\mu} = \frac{1}{c}\vec{\jmath}\cdot\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\rho\vec{E} \\
f^\nu &= F^{\nu\mu}\jmath_\mu = F^{\nu\mu}\underbrace{\jmath^\lambda}_{\frac{1}{\mu_0}\partial_\kappa F^{\kappa\lambda}} g_{\lambda\mu} = \frac{1}{\mu_0}F^{\nu\mu}g_{\mu\lambda}\partial_\kappa F^{\kappa\lambda} \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left[\partial_\kappa\left(F^{\nu\mu}g_{\mu\lambda}F^{\kappa\lambda}\right)\underbrace{-g_{\mu\lambda}F^{\kappa\lambda}\partial_\kappa F^{\nu\mu}}_{-F^{\kappa\lambda}\partial_\kappa F_{\sigma\lambda}g^{\nu\sigma}}\right] \\
F^{\kappa\lambda}\partial_\kappa F_{\sigma\lambda} &= \frac{1}{2}\left\{F^{\kappa\lambda}\partial_\kappa F_{\sigma\lambda} + F^{\lambda\kappa}\partial_\lambda F_{\sigma\kappa}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{F^{\kappa\lambda}\partial_\kappa F_{\sigma\lambda} + F^{\kappa\lambda}\partial_\lambda F_{\kappa\sigma}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}F^{\kappa\lambda}\partial_\sigma F_{\lambda\kappa} = \frac{1}{4}\partial_\sigma F^{\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} \\
f^\nu &= \partial_\kappa\frac{1}{\mu_0}F^\nu_\lambda F^{\kappa\lambda} - \frac{1}{4\mu_0}\partial^\nu F^{\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} \\
f^\nu &= \partial_\kappa T^{\nu\kappa} \qquad \text{mit} \qquad T^{\nu\kappa} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^\nu_\lambda F^{\kappa\lambda} - \frac{1}{4}g^{\nu\kappa}F^{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

Energie-Impulstensor

$$
(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -u & -\frac{S_x}{c} & -\frac{S_y}{c} & -\frac{S_z}{c} \\ -\frac{S_x}{c} & T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ -\frac{S_y}{c} & T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ -\frac{S_z}{c} & T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
u &: \text{Energiedichte} \\
(S_x, S_y, S_z) &: \text{Poyntingvektor}
\end{aligned}
$$

$$
f^\nu = \partial_\kappa T^{\nu\kappa}
$$

1. Komponente $\int dV$

$$
\int f^\nu\, dV = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \frac{S_x}{c}\, dV + \underbrace{\int \left[\operatorname{div} T\right]_x\, dV}_{\oint [\vec{n}\cdot T]\, ds} \qquad \text{vergleiche früher}
$$

Literaturverzeichnis

[1] H. Goldstein, *Klassische Mechanik*

[2] W. Greiner, *Theoretische Physik*, Mechanik Teil I & II

[3] L. D. Landau & E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band I, VI & VII

[4] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*

[5] Honerkamp & Römer, *Grundlagen der klassischen Theoretischen Physik*

[6] F. Scheck, *Mechanik*

[7] W. Notting, *Grundkurs Theoretische Physik*, Band 1 (Mechanik) & 2 (Analytische Mechanik)

[8] R. Becker & F. Sauter, *Theorie der Elektrizität I*, Stuttgart 1973

[9] J. P. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, Berlin 1983

[10] W. Panofsky & M. Phillip, *Classical Electricity & Magnetism Reading*, 1962

[11] H. Römer & F. Forger, *Elementare Feldtheorie*, 1993